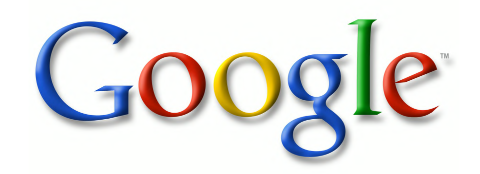
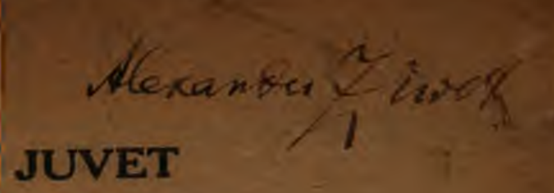




JUVET

L'UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL

ODUCTION

AU

TENSORIEL

ET AU

ÉRENTIEL ABSOLU

Jacques HADAMARD

IBRE DE L'INSTITUT,

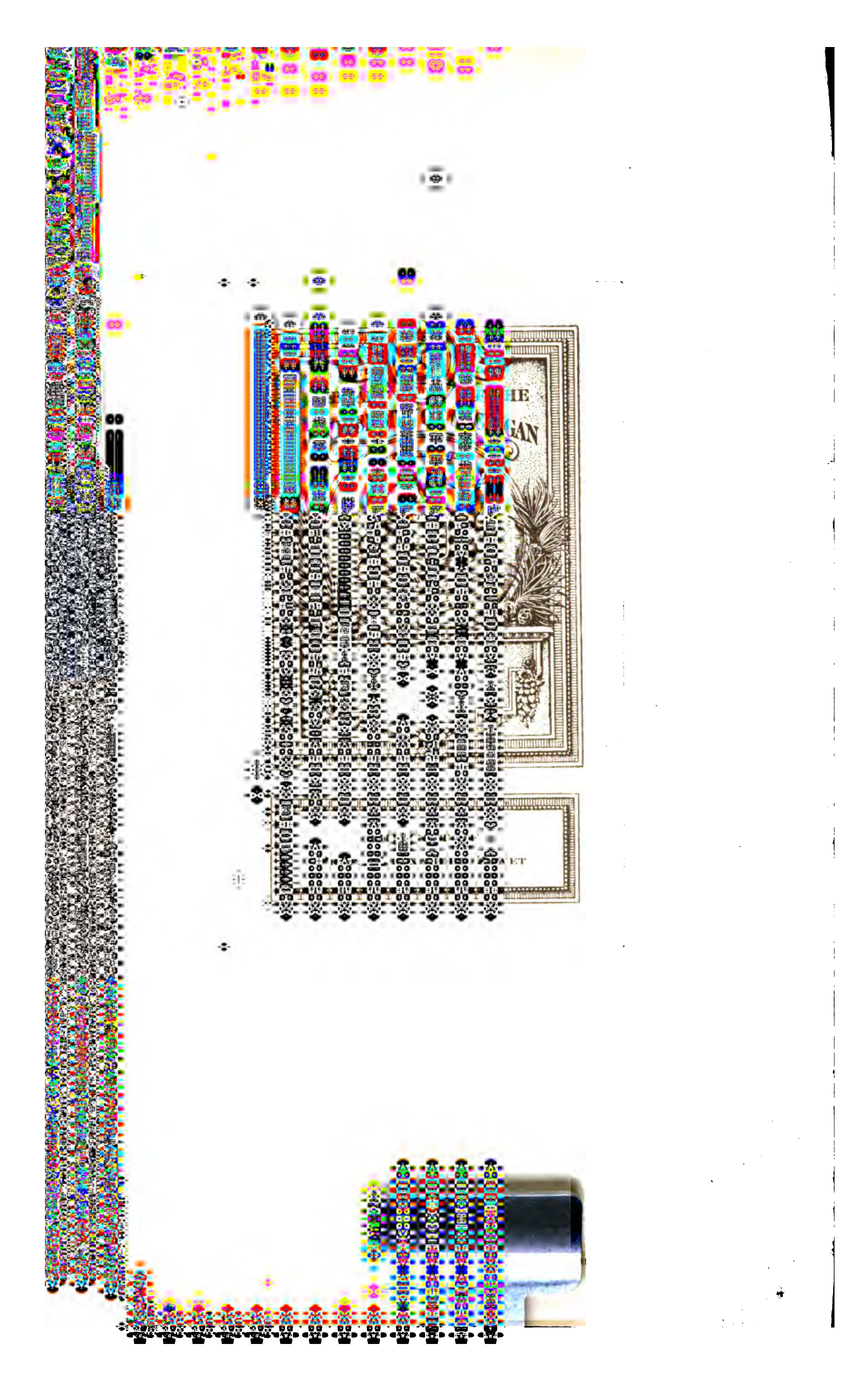
DE FRANCE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

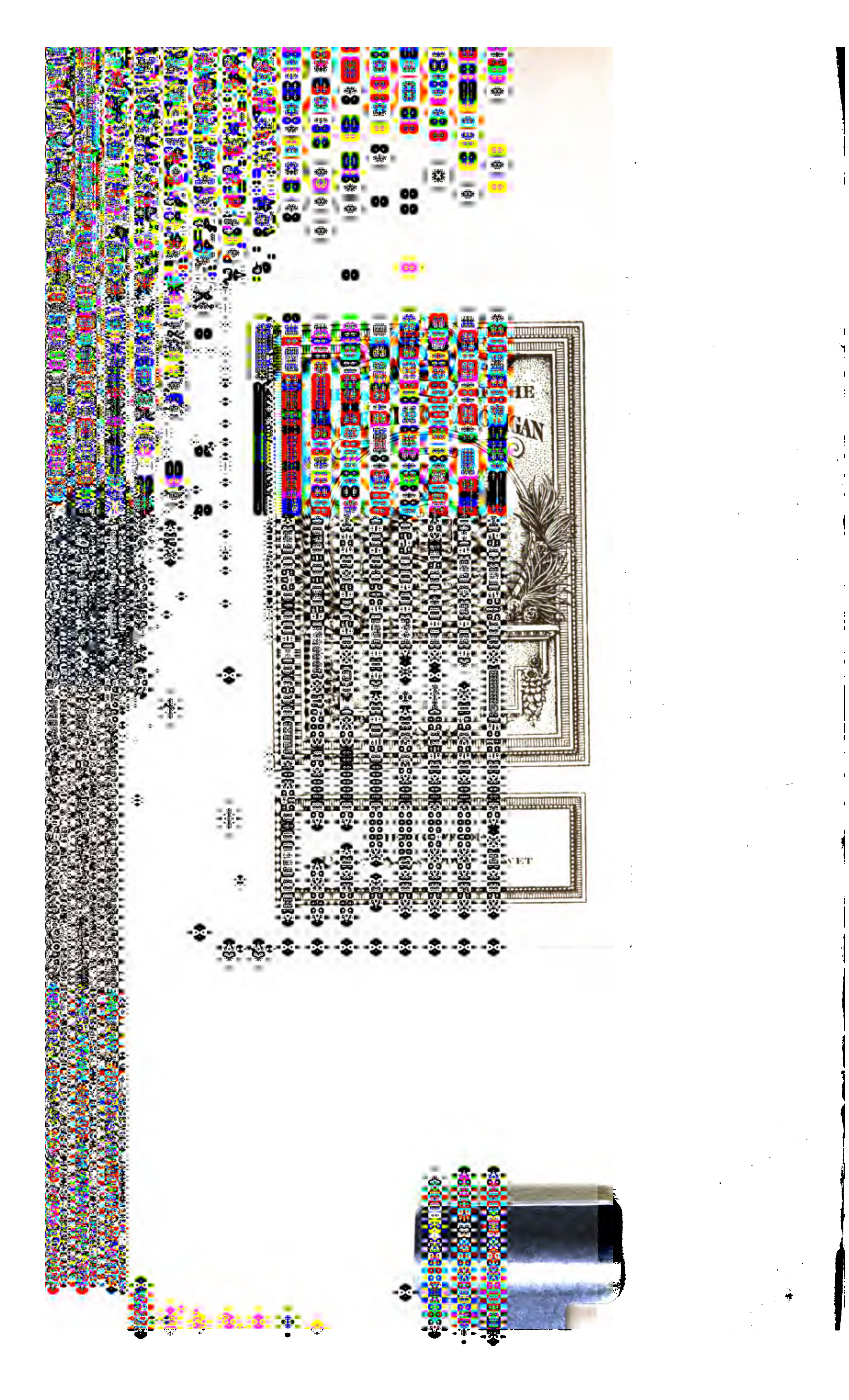
PARIS

NTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

bis, Place de la Sorbonne

1922





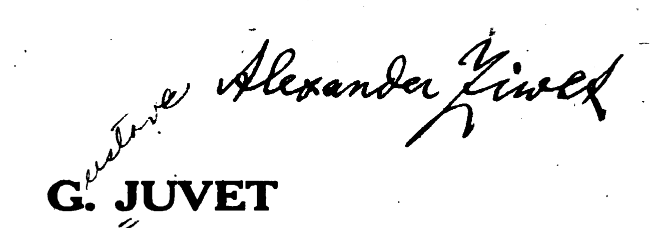
3/7

A la mémoire de mon frère Edouard.

G. J.

INTRODUCTION AU CALCUL TENSORIEL

ET AU CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU



G. JUVET

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL

INTRODUCTION

AU

CALCUL TENSORIEL

ET AU

CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU

Préface de M. Jacques HADAMARD

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

3 et 3 bis, Place de la Sorbonne

1922

PRÉFACE

Nous venions à peine de renaître à la vie scientifique — que la guerre, sans l'interrompre complètement, avait notablement ralentie — lorsque j'eus le très grand plaisir de faire la connaissance de M. Juvet.

Il avait fallu attendre que nos jeunes gens, pas tous, hélas! nous fussent rendus, pour reprendre nos réunions du Collège de France où nous essayions de suivre et d'analyser le mouvement mathématique contemporain. A ces réunions, nous vîmes ce jeune géomètre prendre une part de plus en plus active et de plus en plus heureuse. Son départ de France et son retour dans sa patrie n'ont pas fait cesser cette utile collaboration. Avec son collègue M. Rolin Wavre, M. Juvet a donné l'exemple à ces jeunes mathématiciens suisses qui tiennent à ne pas perdre le contact avec la Science française. De son séjour à Paris, tout en portant son attention sur plusieurs des sujets que la littérature mathématique contemporaine désignait à notre étude, il s'était plus spécialement adonné au Calcul différentiel absolu et aux autres problèmes que soulève aujourd'hui la relativité généralisée.

Une telle préoccupation arrivait à son heure.

On sait comment, sous la puissante impulsion de M. Langevin, les jeunes physiciens français se sont associés au mouvement d'idées créé par les découvertes de M. Einstein. Mais la coopération à ce mouvement n'importait pas moins aux mathématiciens, dont la nouvelle théorie fait intervenir les doctrines à un plus haut degré que ne l'avait peut-être fait aucune conception physique antérieure. C'est ce qu'avaient d'ailleurs compris dès l'abord des géomètres tels que M. Borel. Mais le champ est vaste et de nombreux travailleurs n'y sont pas inutiles. Nous sommes heureux de l'aide que M. Juvet nous a apportée et nous apporte aujourd'hui pour son défrichement.

Il était temps d'ailleurs pour la Science mathématique que de telles questions fussent posées et un tel champ de recherches ouvert. Une fois de plus s'est manifestée l'importance de l'application physique pour la direction de la pensée mathématique et se sont vérifiées les paroles aujourd'hui classiques que Poincaré prononçait au Congrès mathématique de Zurich:

« Le physicien nous pose des problèmes dont il attend de nous la solution. « Mais en nous les proposant, il nous a payé largement d'avance le service que « nous pourrons lui rendre, si nous parvenons à les résoudre.

. . . .

« Les combinaisons que peuvent former les nombres et les symboles sont « une multitude infinie. Dans cette multitude, comment choisirons-nous celles qui « sont dignes d'attirer notre attention? Nous laisserons-nous uniquement guider « par notre caprice? Ce caprice, qui lui-même d'ailleurs ne tarderait pas à se « lasser, nous entraînerait sans doute bien loin les uns des autres et nous cesserions « promptement de nous entendre entre nous.

« Mais ce n'est là que le petit côté de la question.

« La physique nous empêchera sans doute de nous égarer, mais elle nous « préservera d'un danger bien plus redoutable; elle nous empêchera de tourner « sans cesse dans le même cercle. . . . . . . »

La Géométrie infinitésimale n'avait-elle pas par trop perdu de vue ces paroles, depuis la grande œuvre par laquelle Darboux avait mis au point et porté à un remarquable degré de perfection l'étude de tous les problèmes géométriques qui se posaient de son temps? Il est permis de se le demander, à la lecture de ces innombrables travaux publiés pendant ces dernières années et où les notions classiques de Gauss, d'Ossian Bonnet et de Darboux reviennent inlassablement dans tous les ordres possibles, un peu comme les figurants du cirque ou, si l'on veut, comme ces bouts de papier rouges, verts et bleus que la méthode Froebel fait assembler aux enfants de nos écoles. On peut se demander si le caprice qui préside à ces combinaisons n'aurait pas gagné à trouver un fil conducteur, et si le danger dont parle Poincaré de tourner toujours dans le même cercle a été évité : de fait, en présence de ces pénibles efforts vers la variété, on garde l'impression d'un fonds de monotonie et même souvent celle de l'inutilité, non pas, bien entendu au sens de cet intérêt direct auquel la Science doit se garder de s'asservir, mais même au seul qui doive nous intéresser, celui de l'ascension et de l'ennoblissement de la pensée humaine.

Il y avait donc, à notre avis, une crise de la Géométrie infinitésimale, et c'est cette crise que l'intervention de la Relativité vient dénouer. Elle a dès l'abord jeté un jour inattendu sur l'œuvre géométrique antérieure en montrant l'importance fondamentale de ce Calcul différentiel absolu de Ricci et Levi Cività, resté presque sans écho lors de son apparition. Quelque opinion que l'on soutienne sur le bien fondé des nouvelles hypothèses, elles assignent à la Géométrie un rôle nouveau et ouvrent pour elle une période nouvelle, non point de cette nouveauté au souffle court que peut trop souvent seul atteindre le mathématicien livré à ses propres forces, mais de cette nouveauté indéfiniment féconde qui ressort de la nature des choses.

Rendons grâce encore une fois à M. Juvet d'avoir retracé pour nous l'aspect mathématique de ces nouvelles idées et ne doutons pas que son ouvrage n'en facilite et n'en accélère non seulement la diffusion, mais le développement.

JACQUES HADAMARD.

AVANT-PROPOS

Le calcul différentiel absolu et le calcul tensoriel sont deux algorithmes — très voisins d'ailleurs — qui forment l'essentiel de la structure mathématique des théories einsteiniennes. Ce petit livre est un exposé des méthodes qui se rattachent à ces algorithmes et qui sont dues à Gauss, Ricci, Riemann, Levi-Civita et Darboux; elles permettent l'analyse approfondie des variétés géométriques quelconques. On sait que la caractéristique de ces méthodes provient de ce qu'elles permettent de faire l'étude d'un être géométrique à un point de vue purement intrinsèque. Les Grecs ne faisaient pas de géométrie autrement; lorsqu'ils cherchaient les propriétés d'une figure, c'était toujours en scrutant la figure elle-même, considérée en soi et prise indépendamment de tout système de référence. La géométrie cartésienne, on le sait, a de tous autres soucis; l'objet à étudier est rattaché à un système de coordonnées souvent fort étranger aux choses qu'il sert à décrire. Pourtant ceux qui contribuaient par leurs recherches au développement de la géométrie analytique n'ont pas été sans voir l'importance de certaines expressions construites avec les coordonnées choisies, mais dont la valeur en est indépendante. L'étude approfondie de ces « invariants » est la base de la théorie gaussienne des surfaces et de la théorie riemannienne des multiplicités quelconques. C'est elle qui a permis de revenir au point de vue des Grecs, mais ce retour n'est pas un abandon des méthodes cartésiennes. Les systèmes de coordonnées ne sont pas rejetés, mais au lieu d'être étrangers aux êtres étudiés, ils en forment la charpente même. La transformation des méthodes géométriques n'est pas un bouleversement, pas plus que la dynamique einsteinienne n'est le résultat d'une révolution qui aurait détruit la mécanique de Newton.

Quelques vieilles idées qu'on croyait mortes, ont repris une vie nouvelle, et la science bénéficiant de tous les acquêts antérieurs perfectionne ses méthodes; seul celui qui ignorait l'état antérieur des doctrines scientifiques croit que l'état actuel résulte d'un bouleversement.

Les premiers linéaments du calcul tensoriel ont leurs racines dans le calcul vectoriel. Nous avons rappelé les principes de celui-ci dans la mesure où ils reparaissent dans celui-là. Nous avons suivi pour ce but, la méthode axiomatique d'exposition, telle qu'elle est développée par M. Weyl dans son livre « Temps, Espace, Matière » *mais nous avons atténué le caractère abstrait d'un tel exposé en faisant appel à l'intuition géométrique, pour le cas de deux ou trois dimensions.*

Pour les développements des théories suivantes, nous nous sommes inspirés toujours des mémoires originaux et si nous avons défini le déplacement parallèle en ayant recours à un espace linéaire euclidien dans lequel la variété donnée est immergée, plutôt qu'en partant des axiomes de M. Weyl et en conservant toujours le point de vue intrinsèque, c'est tout d'abord pour faire connaître un très beau mémoire de M. Levi-Civita, et ensuite pour rendre les moyens et les caractères de cette théorie plus clairs et plus intuitifs.

Notre but aura été atteint si le lecteur, après avoir étudié cette initiation aux méthodes mathématiques de la relativité, est capable de lire ensuite avec profit les mémoires et les traités dont l'objet est la physique einsteinienne.

Mon ami, M. W. Grossmann a bien voulu se charger de faire les figures, qu'il en soit ici affectueusement remercié. J'adresse aussi mes remerciements à mon collègue, M. A. Reymond qui a bien voulu relire les épreuves et me faire part de ses observations.

Neuchâtel, mai 1922.

G. JUVET.

CHAPITRE PREMIER

VECTEURS. — TRANSFORMATIONS LINEAIRES

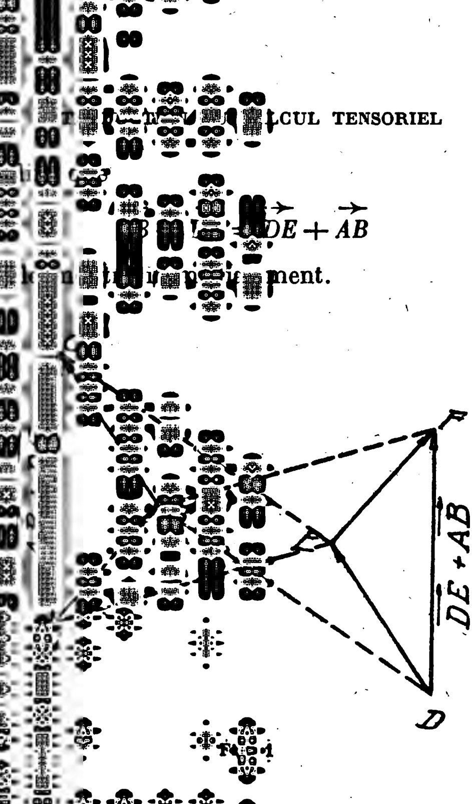
Considérons dans un plan ou dans l'espace deux points A et B ; nous dirons que le segment de droite AB supposé parcouru de A vers B détermine le *vecteur* $\overrightarrow{AB}$; *A est l'origine* et *B l'extrémité* de ce vecteur. La droite indéfinie AB est dite le *support* du vecteur. Le segment BA, parcouru de B vers A détermine le vecteur $\overrightarrow{BA}$; ce dernier vecteur est dit *opposé* au premier.

Déplaçons le segment AB parallèlement à lui-même jusqu'à ce que A coïncide avec un point C, B coïncidant avec un point D ; le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est dit *égal* au vecteur $\overrightarrow{AB}$ (on dit parfois équipollent lorsqu'on veut insister sur le fait que les deux vecteurs ne sont pas identiques).

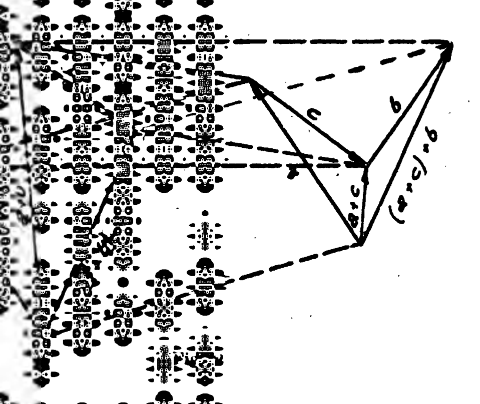
Considérons trois points A, B, C ; ils déterminent 6 vecteurs, deux à deux opposés ; portons notre attention sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est dit la *somme* ou la *résultante* des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Plus généralement, soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$, déplaçons le second vecteur $\overrightarrow{DE}$ parallèlement à lui-même de manière que D vienne coïncider avec B, alors E arrivera en un certain point C, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, mais puisque $\overrightarrow{BC}$ est égal à $\overrightarrow{DE}$, on dira encore que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$. L'addition, ainsi définie par construction, est *commu-*

$$\ldots \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB}$$

... ment.



... de n vecteurs, on fait d'abord ... on ajoute au vecteur résultant ... nouveau vecteur résultant, on



... parmi ceux qui restent encore, ... re des vecteurs donnés. Il est ... ésulte de ces $(n - 1)$ opérations ... uel on choisit les vecteurs pour ... ontrons cette proposition pour

3 vecteurs. La figure 2 donne immédiatement cette démonstration, moyennant que l'on invoque les propriétés les plus simples du parallélisme.

La commutativité de l'addition jointe à la propriété que l'on vient d'établir prouve encore que l'addition est *associative;* c'est-à-dire que si **a**, **b**, **c** sont trois vecteurs, on a :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

La proposition annoncée étant démontrée pour trois vecteurs, on l'étend aisément par induction complète, et en utilisant les deux propriétés fondamentales de l'addition, au cas de n vecteurs.

Le vecteur **b**, *différence* des deux vecteurs **c** et **a**, est un vecteur tel que, ajouté à **a**, il donne une somme égale à **c**. Symboliquement, on écrit :

$$\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathbf{a}.$$

La soustraction est toujours possible.

Enfin, pour achever l'énumération des propriétés de l'addition, disons qu'il existe un vecteur zéro : c'est le vecteur qui, ajouté à un vecteur quelconque **a**, donne un vecteur égal à **a** lui-même :

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$$

Le vecteur zéro est un vecteur dont l'extrémité se confond avec l'origine.

Si **b** est le vecteur opposé à **a**, on a :

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{o}, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a}=-\mathbf{b}. \text{ *)}$$

La définition de la *multiplication* d'un vecteur par un nombre se déduit immédiatement des règles précédentes : soit **a** un vecteur $\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $2\,\mathbf{a}$, $3\,\mathbf{a}, \ldots n\,\mathbf{a}$, ($n$ entier) s'obtiennent en ajoutant **a** à lui-même un nombre convenable de fois, ce que l'on fait en portant bout à bout ce vecteur sur la droite qui le porte. Le vecteur $\frac{\mathbf{a}}{q}$ (q entier) est le vecteur qui multiplié par q redonne **a** ; c'est donc le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $q.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$. Le sens du symbole $\frac{p}{q}\,\mathbf{a}$ est donc parfaitement clair, p et q étant entiers. Par suite, si λ est un nombre rationnel, la multiplication qu'on vient de définir jouit des propriétés que manifestent les égalités suivantes :

*) Nous appellerons pour abréger l'ensemble de ces lois : les lois (A).

$(\lambda + \mu)\, \mathbf{a} = (\lambda \mathbf{a}) + (\mu \mathbf{a})$ [distributivité de 1re espèce, par rapport à l'addition.]
$\lambda\, (\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu)\, \mathbf{a}$ [associativité.]
$1.\mathbf{a} = \mathbf{a}$
$\lambda\, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) + (\lambda \mathbf{b})$ [distributivité de 2e espèce, par rapport à l'addition.]

Nous admettrons que ces lois *) sont valables pour des nombres λ réels quelconques. Le lecteur familiarisé avec les raisonnements les plus élémentaires de la théorie des ensembles linéaires, singulièrement avec les raisonnements fondés sur la notion de coupure, établira en toute généralité, pour tous les nombres réels, les règles précédentes que nous n'avons démontrées que pour des nombres λ rationnels.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons fait intervenir aucune considération métrique, c'est-à-dire que nous n'avons pas comparé deux vecteurs **a** et **b** sous le rapport de leur longueur (au moins tant que ces vecteurs ne sont pas portés par des droites parallèles ou coïncidentes). Le calcul vectoriel tel qu'on le développe ordinairement, introduit à ce point précis les notions de produit scalaire et de produit vectoriel de deux vecteurs, soit par des considérations élémentaires de géométrie, soit par des considérations axiomatiques. Or pour le but que nous poursuivons, qui est de préparer l'établissement de la théorie du calcul tensoriel de telle manière qu'on puisse l'appliquer immédiatement, tant à l'étude des multiplicités à plusieurs dimensions, qu'à la physique einsteinienne, il est préférable de renvoyer à plus tard l'explicitation de ces notions. En effet, ce qui caractérise le calcul vectoriel au sens où l'on entend ce terme dans la mécanique rationnelle classique ou dans la théorie de Maxwell par exemple **, c'est que cet algorithme attire l'attention sur le vecteur considéré comme un être mathématique donné en soi. Or, ce qui nous sera utile plus tard, c'est de connaître précisément les relations des vecteurs avec certains d'entre eux choisis comme vecteurs fondamentaux ou de base, ceux-ci déterminant un système de coordonnées. On peut donc dire que l'on renonce maintenant à ce qui faisait l'originalité du calcul vectoriel pour reprendre les méthodes cartésiennes ; cela ne veut pas dire d'ailleurs que les tentatives, très heureuses souvent, faites dans beaucoup de domaines avec l'aide de ce calcul, aient été inutiles ; mais

*) Nous appellerons ces lois, les lois (M).
**) Voir p. ex. Coffin : Calcul vectoriel, trad. par Véronnet, Paris 1914.

dans certains cas, le désir de concrétiser les expressions analytiques pour leur trouver un sens physique a masqué la vraie nature des choses *.

Considérons n vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$; on dit qu'ils sont *linéairement indépendants* s'il est impossible de trouver n nombres λ_1, λ_2, ..., λ_n, non tous nuls tels que la combinaison linéaire :

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$$

soit nulle.

Si l'on peut trouver n nombres λ_i non tous nuls, tels que l'expression précédente soit nulle, alors un des vecteurs $\mathbf{a}_j$ est une combinaison linéaire des $(n-1)$ autres.

Soient dans un plan, deux vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, auxquels nous supposerons une origine commune ; nous admettrons encore qu'ils sont linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas portés par la même droite indéfinie ; en d'autres termes encore,

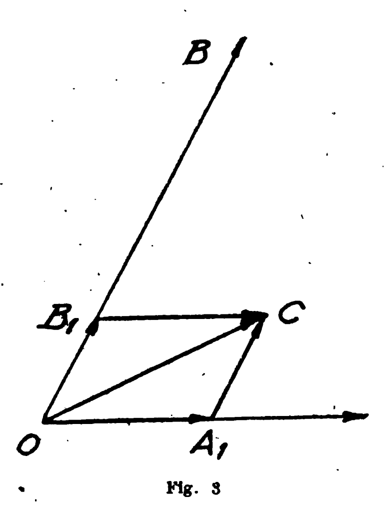


Fig. 3

$\mathbf{u}_2$ n'est pas égal à un multiple de $\mathbf{u}_1$. Je dis que tout vecteur $\mathbf{a}$ du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}$, et $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OB}$. En effet (fig. 3), déplaçons $\mathbf{a}$ de manière que son origine coïncide avec l'origine commune O de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$: $\mathbf{a} = \overrightarrow{OC}$.

*) Voir Weyl : T. E. M., page 38. Nous abrégerons de cette manière l'ouvrage « Temps, Espace, Matière ».

Menons CA_1 parallèle à BO ; on a :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C}$$

mais :

$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

où λ_1 est un nombre réel, et :

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{OB_1} = \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

par suite :

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2.$$

On peut donc choisir dans un plan, deux vecteurs quelconques, mais linéairement indépendants : tout autre vecteur du plan est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

En d'autres termes, il est impossible de choisir dans un plan trois vecteurs linéairement indépendants ; étant donnés dans ce plan trois vecteurs quelconques, **a**, **b**, **c**, on peut toujours trouver trois nombres non nuls tous trois, α, β, γ, tels que :

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = 0.$$

Nous dirons que les deux vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ forment un *système de coordonnées*, par rapport auquel le vecteur quelconque **a** du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est caractérisé par deux nombres λ_1 et λ_2, tels que :

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2.$$

Ce couple est unique, car si l'on avait encore :

$$\mathbf{a} = \lambda'_1 \mathbf{u}_1 + \lambda'_2 \mathbf{u}_2,$$

on en déduirait :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\, \mathbf{u}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)\, \mathbf{u}_2 = 0,$$

mais puisque $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéairement indépendants :

$$\lambda_1 = \lambda'_1 \qquad \lambda_2 = \lambda'_2.$$

Les deux nombres λ_1 et λ_2 sont les *composantes* du vecteur **a**.

Si, au lieu des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, nous utilisons deux autres vecteurs $\mathbf{u}'_1$ et $\mathbf{u}'_2$, pour former un nouveau système de coordonnées dans le plan, par rapport auquel le vecteur **a** a les composantes λ'_1 et λ'_2, nous pouvons nous demander quelles relations existent entre ces nouvelles composantes et les anciennes λ_1 et λ_2. Pour les trouver, il est nécessaire de connaître les composantes des nouveaux vecteurs de base $\mathbf{u}'_1$ et $\mathbf{u}'_2$ dans l'ancien système de coordonnées et

vice-versa. Soient alors α_{11}, α_{12} les composantes de $\mathbf{u}'_1$ et α_{21}, α_{22}, celles de $\mathbf{u}'_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \alpha_{11}\,\mathbf{u}_1 + \alpha_{12}\,\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= \alpha_{21}\,\mathbf{u}_1 + \alpha_{22}\,\mathbf{u}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Soient de plus β_{11}, β_{12} les composantes de $\mathbf{u}_1$ dans le système $(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2)$, et β_{21}, β_{22} celles de $\mathbf{u}_2$ dans ce même système, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \beta_{11}\,\mathbf{u}'_1 + \beta_{12}\,\mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 &= \beta_{21}\,\mathbf{u}'_1 + \beta_{22}\,\mathbf{u}'_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Les formules (1) définissent une transformation linéaire qui fait correspondre aux deux vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ les deux vecteurs $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$.

Les formules (2) définissent une transformation, linéaire aussi, qui n'est pas indépendante de la première ; en effet, si l'on résout les équations (1) par rapport à $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, on doit obtenir les équations (2). Les équations (1) sont bien résolubles, car le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

est différent de zéro ; si cela n'était pas, en effet, il existerait une même relation linéaire entre les éléments d'une colonne:

$$\begin{aligned} \mu_1\,\alpha_{11} + \mu_2\alpha_{21} &= 0, \\ \mu_1\,\alpha_{12} + \mu_2\,\alpha_{22} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui entraînerait l'égalité :

$$\mu_1\,\mathbf{u}'_1 + \mu_2\,\mathbf{u}'_2 = 0,$$

qui est impossible puisque nous avons supposé que $\mathbf{u}'_1$ et $\mathbf{u}'_2$ sont linéairement indépendants, comme vecteurs fondamentaux d'un système de coordonnées. Si l'on porte dans les équations (1) les valeurs des $\mathbf{u}_i$ données par (2), on doit obtenir des identités ; il faut donc que les α_{ik} et les β_{pq} satisfassent aux équations :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\,\beta_{11} + \alpha_{12}\,\beta_{21} &= 1\,; & \alpha_{21}\,\beta_{11} + \alpha_{22}\,\beta_{21} &= 0 \\ \alpha_{11}\,\beta_{12} + \alpha_{12}\,\beta_{22} &= 0\,; & \alpha_{21}\,\beta_{12} + \alpha_{22}\,\beta_{22} &= 1 \end{aligned}$$

qu'on peut écrire plus abréviativement :

$$\sum_{r=1}^{r=2} \alpha_{ir}\,\beta_{rk} = \delta_{ik}, \qquad (i,\ k = 1,\ 2) \tag{3}$$

en désignant par le symbole δ_{ik}, le nombre zéro, si $i \neq k$, et le nombre 1, si $i = k$. De même, en portant dans (2) les valeurs des $\mathbf{u}'_j$ données par (1), l'on trouve :

$$\sum_{r=1}^{r=2} \beta_{ir} \alpha_{rk} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2) \qquad (4)$$

Les relations (3) définissent les β_{ik} en fonction des α_{pq} ; la théorie élémentaire des déterminants nous eût permis d'écrire immédiatement les équations (3) et (4) ; ces dernières, d'ailleurs, ne sont qu'une conséquence des relations (3), comme on le démontre aisément.

On dit que les formules (2) définissent la transformation *inverse* de la transformation donnée par les équations (1).

Reprenons alors le vecteur :

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2,$$

qui s'écrit dans le deuxième système de coordonnées :

$$\mathbf{a} = \lambda'_1 \mathbf{u}'_1 + \lambda'_2 \mathbf{u}'_2.$$

On a donc l'équation :

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \lambda'_1 \mathbf{u}'_1 + \lambda'_2 \mathbf{u}'_2$$

qui doit se transformer en une identité par rapport à $\mathbf{u}_1$ et à $\mathbf{u}_2$ si l'on remplace les $\mathbf{u}'_i$ par leurs valeurs (1) ; le calcul donne :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_{11}\lambda'_1 + \alpha_{21}\lambda'_2 \\ \lambda_2 &= \alpha_{12}\lambda'_1 + \alpha_{22}\lambda'_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

En remplaçant les $\mathbf{u}_i$ par leurs valeurs (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \beta_{11}\lambda_1 + \beta_{21}\lambda_2 \\ \lambda'_2 &= \beta_{12}\lambda_1 + \beta_{22}\lambda_2. \end{aligned} \qquad (5)$$

D'une façon plus précise et plus synthétique, on dit que les deux séries de variables λ_i et $\mathbf{u}_i$ sont *contragrédientes*, si après transformation, l'expression

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

prend la forme

$$\lambda'_1 \mathbf{u}'_1 + \lambda'_2 \mathbf{u}'_2.$$

On voit donc que si les variables $\mathbf{u}_i$ se transforment par les équations (1), les variables contragrédientes λ_i se transforment par les

équations (5) ; les coefficients des seconds membres y étant les mêmes que ceux de la transformation (2) inverse de (1), à cela près que les lignes sont changées en colonnes et vice-versa.

Les composantes λ_1 et λ_2 du vecteur **a** sont dites plus précisément ses composantes *contravariantes*, on dit aussi que dans une transformation de coordonnées, *elles se comportent d'une manière contravariante à la manière dont se comportent les vecteurs de base.* Nous verrons plus loin une autre interprétation des équations (5).

Généralisons rapidement ces considérations au cas de l'espace.

Soient dans l'espace trois vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ tels qu'aucun d'eux ne soit une combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire tels qu'il ne puisse y avoir aucune relation de la forme

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 = 0$$

avec des α_i non tous nuls. En d'autres termes encore, ces trois vecteurs ramenés à une même origine O, par translation, ne sont pas coplanaires. Soit alors $OABC$ le trièdre qu'ils forment (fig. 4) ; je dis que tout vecteur **a** (qu'on peut ramener en $\overrightarrow{OD}$) est une

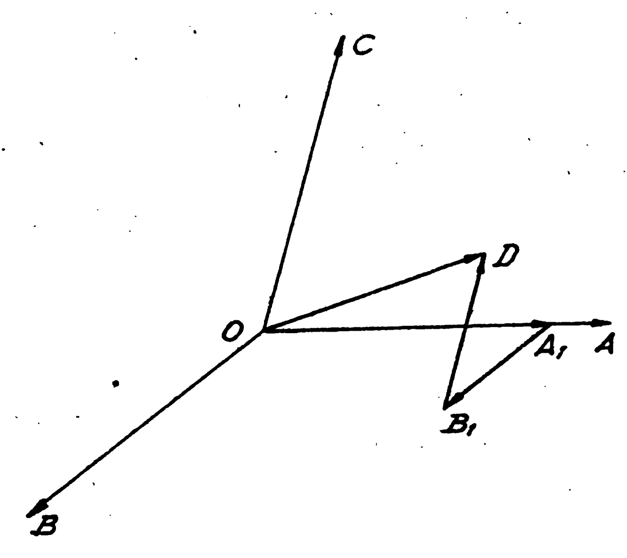


Fig. 4

combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. En effet, menons par l'extrémité D du vecteur **a**, le plan parallèle au plan BOC, et soit A_1 la trace de la droite indéfinie OA sur ce plan. Menons enfin dans ce

plan la droite B_1D parallèle à OC, et considérons la ligne brisée OA_1B_1D, on a :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1D}$$

mais :

$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1\overrightarrow{OA} = \lambda_1\mathbf{u}_1$$
$$\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda_2\overrightarrow{OB} = \lambda_2\mathbf{u}_2$$
$$\overrightarrow{B_1D} = \lambda_3\overrightarrow{OC} = \lambda_3\mathbf{u}_3$$

les λ_i étant des nombres réels. Par suite :

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3.$$

Les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont les composantes du vecteur $\mathbf{a}$ dans le système $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$; ces nombres sont uniques et bien déterminés, car si, par exemple, l'on avait encore :

$$\mathbf{a} = \lambda'_1\mathbf{u}_1 + \lambda'_2\mathbf{u}_2 + \lambda'_3\mathbf{u}_3$$

on en déduirait :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\mathbf{u}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)\mathbf{u}_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)\mathbf{u}_3 = 0$$

et par suite

$$\lambda_i = \lambda'_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Prenons maintenant un autre système de coordonnées ; soient $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$, $\mathbf{u}'_3$, trois vecteurs non coplanaires, et désignons par α_{i1}, α_{i2}, α_{i3} les composantes de $\mathbf{u}'_i$ dans l'ancien système :

$$\mathbf{u}'_i = \alpha_{i1}\mathbf{u}_1 + \alpha_{i2}\mathbf{u}_2 + \alpha_{i3}\mathbf{u}_3, \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (7)$$

et par β_{k1}, β_{k2}, β_{k3} celles de $\mathbf{u}_k$ dans le nouveau

$$\mathbf{u}_k = \beta_{k1}\mathbf{u}'_1 + \beta_{k2}\mathbf{u}'_2 + \beta_{k3}\mathbf{u}'_3. \qquad (k = 1, 2, 3) \qquad (8)$$

Puisque les équations (8) doivent être une conséquence des équations (7), les β et les α doivent être liés par certaines équations que l'on obtient bien aisément en portant les premiers membres de (7) dans les équations (8) et réciproquement. L'on trouve :

$$\sum_{r=1}^{r=3} \alpha_{ir}\ \beta_{rk} = \delta_{ik} \qquad (9)$$

$$\sum_{r=1}^{r=3} \beta_{ir}\ \alpha_{rk} = \delta_{ik} \qquad (10)$$

Les équations (10) sont d'ailleurs une conséquence des équations (9). La transformation définie par (8) est dite la transformation inverse de la transformation (7).

Désignons par λ'_i les composantes de **a** dans le nouveau système ; puisque :

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \lambda'_1\mathbf{u}'_1 + \lambda'_2\mathbf{u}'_2 + \lambda'_3\mathbf{u}'_3$$

et que cette égalité doit être une identité en les $\mathbf{u}'_i$ quand on y remplace les $\mathbf{u}_k$ par leurs valeurs (8), ou une identité en les $\mathbf{u}_k$ quand on y remplace les $\mathbf{u}'_i$ par leurs valeurs (7), il s'ensuit que :

$$\lambda'_k = \beta_{1k}\lambda_1 + \beta_{2k}\lambda_2 + \beta_{3k}\lambda_3 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \qquad (11)$$

$$\lambda_j = \alpha_{1j}\lambda'_1 + \alpha_{2j}\lambda'_2 + \alpha_{3j}\lambda'_3 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)\ ; \qquad (12)$$

on dit de nouveau que les variables λ_i et les variables $\mathbf{u}_i$ sont contragrédientes, ou mieux qu'elles forment deux séries contragrédientes de variables. On retrouve de nouveau l'analogie entre la transformation (11) et la transformation (8), inverse de (7).

Nous allons généraliser ces notions et bien que la représentation géométrique nous fasse dorénavant défaut pour soutenir l'intuition, nous continuerons d'employer le langage géométrique.

Donnons-nous un ensemble infini d'objets que nous nommerons *vecteurs ;* définissons *l'addition* de deux ou plusieurs de ces vecteurs, comme une opération satisfaisant aux lois (A) et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel quelconque, comme une opération qui obéit aux lois (M), et convenons que ces opérations appliquées sur des vecteurs de l'ensemble donné redonnent des vecteurs de cet ensemble. Nous dirons encore que k vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$ $\mathbf{a}_k$ sont linéairement indépendants s'il est impossible de trouver k nombres, non tous nuls, tels que :

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}.$$

Nous parachevons la définition de notre ensemble de vecteurs en supposant qu'il est possible d'y trouver n vecteurs linéairement indépendants, mais que $(n+1)$ d'entre eux, pris arbitrairement soutiennent toujours une ou plusieurs relations linéaires ou homogènes. L'ensemble ainsi constitué est dit une *multiplicité vectorielle linéaire à n dimensions.*

Ces définitions ne sont pas contradictoires, un examen rapide le montre aisément et les considérations qui suivent nous en persua-

dent d'ailleurs. Puisqu'il est possible de trouver n vecteurs linéairement indépendants, soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_n)$ un tel groupe. Si $\mathbf{a}$ est un vecteur quelconque de la multiplicité, d'après nos définitions, il faut qu'il s'exprime linéairement en fonction des $\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{u}_n$$

et cela d'une manière univoque, car si l'on avait encore :

$$\mathbf{a} = \lambda'_1\mathbf{u}_1 + \lambda'_2\mathbf{u}_2 + \dots + \lambda'_n\mathbf{u}_n$$

on en déduirait :

$$\lambda_i = \lambda'_i.$$

Les λ_i sont encore dits les composantes du vecteur $\mathbf{a}$ dans le système de coordonnées dont les $\mathbf{u}_i$ sont les vecteurs de base.

Soit $\mathbf{b}$ un autre vecteur :

$$\mathbf{b} = \mu_1\mathbf{u}_1 + \mu_2\mathbf{u}_2 + \dots + \mu_n\mathbf{u}_n,$$

le vecteur :

$$\mathbf{c} = (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{u}_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)\mathbf{u}_n$$

est égal d'après les propriétés de l'addition, au vecteur $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Donc dans un système de coordonnées quelconque, les composantes du vecteur somme de plusieurs autres vecteurs sont égales respectivement aux sommes des composantes de même indice des vecteurs donnés.

On voit aussi que le vecteur

$$\mathbf{d} = (\rho\lambda_1)\mathbf{u}_1 + (\rho\lambda_2)\mathbf{u}_2 + \dots + (\rho\lambda_n)\mathbf{u}_n$$

où ρ est un nombre réel, est égal d'après les règles de la multiplication au vecteur $\rho\mathbf{a}$. Le vecteur $\mathbf{o}$ est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles; comme on s'en rendra compte, cette définition est indépendante du système de coordonnées. Si l'on change de système de coordonnées, c'est-à-dire si l'on prend d'autres vecteurs de base $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n$, le vecteur $\mathbf{a}$ aura dans ce système de nouvelles composantes $\lambda'_1, \dots \lambda'_n$; cherchons-les. Les vecteurs $\mathbf{u}'_i$ s'expriment dans l'ancien système par

$$\mathbf{u}'_i = \alpha_{i1}\mathbf{u}_1 + \alpha_{i2}\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_{in}\mathbf{u}_n \qquad (13)$$

les α_{ik} étant leurs composantes. Puisque les $\mathbf{u}'_i$ doivent être linéairement indépendants, le déterminant $|\alpha_{ik}| \neq 0$; si les β_{ik} sont les coefficients de la transformation inverse de la transformation (13),

ou si l'on veut les composantes des $\mathbf{u}_i$ dans le système de coordonnées $(\mathbf{u}'_k)$, les formules qui expriment les λ'_i en fonction des λ_k sont les suivantes :

$$\lambda'_i = \beta_{1i}\lambda_1 + \beta_{2i}\lambda_2 + \dots + \beta_{ni}\lambda_n$$

on les obtient en écrivant que :

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_n\mathbf{u}_n = \lambda'_1\mathbf{u}'_1 + \lambda'_2\mathbf{u}'_2 \dots + \lambda'_n\mathbf{u}'_n$$

est une identité en les $\mathbf{u}'_i$ quand on y remplace les $\mathbf{u}_k$ par leur valeur :

$$\mathbf{u}_k = \beta_{k1}\mathbf{u}'_1 + \beta_{k2}\mathbf{u}'_2 + \dots + \beta_{kn}\mathbf{u}'_n \qquad (14)$$

Puisque les formules (14) résolvent les équations (13) et vice-versa, on en déduit que :

$$\sum_{r=1}^{r=n} \alpha_{ir}\,\beta_{rk} = \delta_{ik} \qquad (15)$$

$$(i,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ n)$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} \beta_{ir}\,\alpha_{rk} = \delta_{ik} \qquad (16)$$

Modifions légèrement nos notations, la raison en sera claire plus tard. Désignons par α_i^k les grandeurs α_{ik} et par β_i^k les β_{ik} ; puis au lieu de lettres accentuées pour désigner des grandeurs relatives au deuxième système de coordonnées, utilisons des lettres surlignées.

Les équations (13) et (14) s'écrivent :

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_i^k \mathbf{u}_k \qquad (13')$$

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_i^k \overline{\mathbf{u}}_k \qquad (14')$$

Soient maintenant deux séries de n variables $(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots\ \xi_n)$ et $(\eta^1,\ \eta^2,\ \dots\ \eta^n)$; supposons que les ξ_i se transforment en de nouvelles variables $\overline{\xi}_k$ suivant les mêmes formules qui permettent la transformation des $\mathbf{u}_i$ en les $\overline{\mathbf{u}}_k$. On dira que les deux séries (ξ_i) et $(\mathbf{u}_i)$ sont *cogrédientes*, ou encore que les (ξ_i) sont des variables qui se transforment d'une manière *covariante* aux vecteurs de base, ou plus simplement que ce sont des *variables covariantes*.

Supposons maintenant que les η^i se transforment en de nouvelles variables $\bar{\eta}^k$ suivant les formules :

$$\bar{\eta}^i = \sum_{k=1}^{k=n} \mu^i_k \eta^k \tag{14''}$$

et que l'on ait, toutes transformations faites, une identité de la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \eta^i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{\xi}_i \bar{\eta}^i . \tag{17}$$

On dit alors que les deux séries de variables (ξ_i) et (η^i) sont deux séries contragrédientes; on dit encore que les (η^i) sont des variables qui se transforment d'une *manière contravariante* aux vecteurs de base, ou encore que ce sont des variables *contravariantes.*

Remplaçons dans (17) les $\bar{\eta}^i$ par leurs valeurs, et identifions les coefficients des η^k, il vient :

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{i=n} \mu^i_k \bar{\xi}_i ,$$

mais puisque les ξ se transforment comme les **u**, on a :

$$\xi_k = \sum_{r=1}^{i=n} \beta^r_k \bar{\xi}_r ,$$

par suite :

$$\mu^i_k = \beta^i_k$$

Si l'on a égard au fait que dans les formules (14''), l'indice muet * est l'indice inférieur des μ tandis que dans les formules (14') l'indice muet est l'indice supérieur des β, on voit que les coefficients de la transformation des variables η (contravariantes aux **u**), en les variables $\bar{\eta}$, sont les mêmes que ceux de la transformation (14') inverse de (13'), à cela près que les lignes sont changées en colonnes et vice-versa dans le tableau où on les groupe. On verrait de même que la transformation inverse de (14'') est la suivante :

*) Nous appellerons indice muet suivant une locution expressive due à M. Eddington, l'indice suivant lequel on effectue des sommations, dans une expression analytique donnée.

$$\eta^i = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha^i_k \, \bar{\eta}^k \tag{13''}$$

Reprenons le vecteur

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n \, ;$$

dans le second système de coordonnées, il s'écrit :

$$\mathbf{a} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 + \ldots + \bar{\lambda}_n \bar{\mathbf{u}}_n .$$

Donc, l'expression $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \mathbf{u}_i$ se transforme en $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{u}}_i$ quand on effectue la transformation de coordonnées (13'); c'est donc dire que les (λ_i) et les $(\mathbf{u}_i)$ sont deux séries de variables *contragrédientes*, c'est dire encore que les λ_i sont des variables contravariantes. Dorénavant, nous désignerons les variables *contravariantes par des lettres affectées d'indices placés supérieurement* (comme des exposants, la confusion n'est d'ailleurs pas à craindre) et les variables *covariantes* par des *lettres affectées d'indices inférieurs*. Nous avons vu que les composantes d'un vecteur, telles que nous les avons définies sont des variables contravariantes. Nous allons voir un exemple de variables covariantes.

Supposons que nous fassions correspondre à tout vecteur **a** de la multiplicité n- dimensionnelle que nous avons définie plus haut, un nombre réel $L(\mathbf{a})$; ce nombre est donc une fonction du vecteur **a** ; nous supposons qu'elle soit telle que sa valeur pour le vecteur $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ soit égale à la somme des valeurs qu'elle prend pour les vecteurs **a** et **b** pris séparément :

$$L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b}) \, ;$$

cela entraîne pour λ rationnel :

$$L(\lambda \mathbf{a}) = \lambda L(\mathbf{a})$$

et nous supposons que cette équation fonctionnelle est vraie quel que soit le nombre réel λ. La fonction $L(\mathbf{a})$ est dite une *forme linéaire* du vecteur **a**.

Si donc on utilise un système de coordonnées $(\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n)$, dans lequel le vecteur **a** s'écrit :

$$\mathbf{a} = \eta^1 \mathbf{u}_1 + \eta^2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \eta^n \mathbf{u}_n,$$

on voit tout de suite que l'on peut écrire $L(\mathbf{a})$ sous la forme :

$$L(\mathbf{a}) = \eta^1 L(\mathbf{u}_1) + \eta^2 L(\mathbf{u}_2) + \dots + \eta^n L(\mathbf{u}_n).$$

Posons alors : $L(\mathbf{u}_i) = \alpha_i$, les α_i sont dits les coefficients de la forme linéaire ; ce sont des variables *covariantes*, comme nous l'allons voir. En effet, si l'on utilise un deuxième système de coordonnées $(\overline{\mathbf{u}}_1, \dots \overline{\mathbf{u}}_n)$ dans lequel on ait :

$$\mathbf{a} = \overline{\eta}^1 \overline{\mathbf{u}}_1 + \dots + \overline{\eta}^n \overline{\mathbf{u}}_n$$

la forme $L(\mathbf{a})$ s'y écrira :

$$L(\mathbf{a}) = \overline{\alpha}_1 \overline{\eta}^1 + \overline{\alpha}_2 \overline{\eta}^2 + \dots + \overline{\alpha}_n \overline{\eta}^n,$$

si l'on pose $L(\overline{\mathbf{u}}_i) = \overline{\alpha}_i$; on a donc :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \eta^i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\alpha}_i \overline{\eta}^i,$$

mais puisque les η^i sont des variables contravariantes, on en déduit que les α_i sont des variables *covariantes*. Les coefficients d'une forme linéaire d'un vecteur sont des variables covariantes, quand on exprime cette forme au moyen des composantes contravariantes de ce vecteur.

Remarques.

I. Les formules (13″) qui donnent les composantes $\overline{\eta}^i$ d'un vecteur $\mathbf{a}$ dans un nouveau système de coordonnées, en fonction des anciennes composantes η^i de ce même vecteur peuvent être interprétées d'une autre manière. Au lieu d'imaginer qu'on a deux systèmes de coordonnées et un seul vecteur, imaginons que l'on n'ait qu'*un* seul système (l'ancien) et *deux* vecteurs $\mathbf{a}$ et $\overline{\mathbf{a}}$ dont les composantes sont respectivement les η^i et les $\overline{\eta}^i$; alors les formules (13″) et leurs inverses définissent précisément une correspondance entre le vecteur $\mathbf{a}(\eta^i)$ et le vecteur $\overline{\mathbf{a}}(\overline{\eta}^i)$, ou si l'on veut, une transformation du vecteur $\mathbf{a}$ en le vecteur $\overline{\mathbf{a}}$. Les formules (13″), ou la signification de la transformation, montrent que cette correspondance jouit des deux propriétés suivantes : si elle fait correspondre $\overline{\mathbf{a}}$ à $\mathbf{a}$, et $\overline{\mathbf{b}}$ à $\mathbf{b}$:

1°) elle fait correspondre $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$ à $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

2°) elle fait correspondre $\lambda\overline{\mathbf{a}}$ à $\lambda\mathbf{a}$ (λ réel).

Une transformation qui jouit de ces deux propriétés est dite une transformation *linéaire*, ou *affine* ; on l'appelle aussi *affinité*. Les coefficients des formes linéaires des seconds membres des formules de la transformation déterminent une *matrice*.

Puisque le produit de deux affinités est une affinité et que l'inverse d'une affinité est encore une affinité, les transformations linéaires forment un *groupe*. Donc, les *transformations de coordonnées forment un groupe*.

II. Nous allons introduire pour terminer ce chapitre, une notion qui nous sera très utile dans la suite : la notion de *multiplicité ponctuelle linéaire à n dimensions*.

Considérons le groupe formé par n nombres réels quelconques $(x_1, x_2, \ldots x_n)$; pour plus de simplicité, nous dirons que ce groupe est un point P; les x_i sont dits les coordonnées du point P.

Deux points sont différents quand les groupes de n nombres qui les définissent ne sont pas identiques. L'ensemble des points obtenus en faisant varier indépendamment les uns des autres, les nombres x_i entre certaines limites (qui peuvent d'ailleurs être $-\infty$ et $+\infty$) forme un *continuum à n dimensions*. Pour notre objet, nous admettrons que les x_i peuvent varier entre $-\infty$ et $+\infty$. Le point O (o, o, ... o), dont toutes les coordonnées sont nulles est dit *l'origine*. Nous aurons à porter notre attention tout à l'heure sur les points A_1 $(u_1, o \ldots o)$, A_2 $(o, u_2, \ldots o) \ldots A_n$ $(o, o, \ldots u_n)$. les coordonnées de A_i sont nulles, sauf la $i^{\text{ième}}$ qui est égale à u_i.

Deux points P et Q déterminent dans leur ensemble et par l'ordre dans lequel on les énonce, un objet que nous appellerons un *vecteur*, et que nous désignerons soit par la notation $\overrightarrow{PQ}$, soit par une lettre minuscule grasse $\mathbf{a}$. Nous astreindrons par la suite ces vecteurs aux définitions et aux règles de calcul que nous avons établies dans le présent chapitre. Considérons les n vecteurs $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{u}_1, \ldots$ $\overrightarrow{OA_n} = \mathbf{u}_n$; nous les appellerons vecteurs de base du système de coordonnées (x_i).

Soient $P(x_i)$ et $Q(y_i)$ deux points ; formons les différences :

$$y_i - x_i = v_i$$

et posons $\zeta^i = \frac{v_i}{u_i}$; les ζ^i sont dits les *composantes* du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ dans le système de coordonnées vectoriel dont les $\mathbf{u}_i$ sont les vec-

teurs de base. Cette détermination sera justifiée tout à l'heure. Soit encore le point $R(z_i)$; le vecteur $\overrightarrow{PR}$ est dit la somme des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$; calculons les quantités suivantes correspondant respectivement à ces 3 vecteurs :

$$\text{pour } \overrightarrow{PQ} \ : \ \zeta^i = \frac{\nu_i}{u_i} = \frac{y_i - x_i}{u_i}$$

$$\text{pour } \overrightarrow{QR} \ : \ \xi^i = \frac{\lambda_i}{u_i} = \frac{z_i - y_i}{u_i}$$

$$\text{pour } \overrightarrow{PR} \ : \ \eta^i = \frac{\mu_i}{v_i} = \frac{z_i - x_i}{u_i}$$

on a :

$$\eta^i = \zeta^i + \xi^i.$$

Ce qui veut dire que les *composantes du vecteur somme* sont égales à la *somme des composantes* de même rang des vecteurs dont on fait la somme. Deux vecteurs dont les composantes de même rang sont égales sont *égaux ;* grâce à cette définition, il devient donc possible de définir la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ quelconques ; pour cela, on fait la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$, soit $\overrightarrow{AE}$; c'est le résultat cherché ; E est le point dont les coordonnées sont égales aux coordonnées de même rang du point A augmentées des composantes de même rang du vecteur $\overrightarrow{CD}$. On dit qu'on a amené le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en $\overrightarrow{BE}$ *;* on eût pu tout aussi bien amener $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DF}$ *;* F étant un point qu'on obtient bien aisément et l'on voit que

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}.$$

Par définition le vecteur $\lambda\mathbf{a}$ est le vecteur dont les composantes sont égales aux composantes de $\mathbf{a}$ multipliées par λ.

Puisque les coordonnées (x_i) d'un point quelconque P peuvent s'écrire :

$$x_i = 0 + 0 + \ldots + \xi^i u_i + \ldots + 0$$

les ξ^i étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$, on voit facilement que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est la somme des n vecteurs $\xi^1.\overrightarrow{OA_1}$, $\xi^2.\overrightarrow{OA_2}$, ... $\xi^n.\overrightarrow{OA_n}$; on peut donc écrire :

$$\overrightarrow{OP} = \xi^1 \mathbf{u}_1 + \xi^2 \mathbf{u}_2 + \dots + \xi^n \mathbf{u}_n.$$

Les vecteurs que nous venons de définir satisfont bien à toutes les définitions données plus haut.

Nous avons donc introduit dans le continuum ponctuel que nous venons de définir une multiplicité vectorielle linéaire ; elle est à n dimensions comme le montrent la formule précédente et le fait que parmi les $\mathbf{u}_i$, il n'en est aucun qui soit une combinaison linéaire des autres.

On dit que le continuum est décrit avec d'autres coordonnées si l'on convient que le point $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est le même que le point $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots \overline{x}_n)$, les $\overline{x}_i$ étant des fonctions des x_i :

$$\overline{x}_i = f_i (x_1, \dots x_n).$$

Nous aurions alors une autre origine $\overline{O}$ $(o, o, \dots o)$ (le point $\overline{O}$ est le point dont les anciennes coordonnées annulent les n fonctions f_i); nous définirions n nouveaux vecteurs de base $\overrightarrow{\overline{O}B_1}$, $\overrightarrow{\overline{O}B_2}$, ... $\overrightarrow{\overline{O}B_n}$ les points B_i ayant les nouvelles coordonnées : $B_1 (\overline{u}_1, o \dots o)$, $B_2(o, \overline{u}_2, o \dots o)$; $\dots B_n(o, o \dots \overline{u}_n)$. Les règles que nous avons posées pour le calcul des vecteurs dans le continuum *ne sont plus valables ici*, lorsque les fonctions f_i sont quelconques ; en particulier la règle n'est plus valable qui dit que les sommes 2 à 2 des composantes de deux vecteurs sont les composantes de la somme du vecteur. Nos définitions ne restent valables que si les fonctions f_i sont *linéaires*, c'est-à-dire si

$$\overline{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k + \alpha_i.$$

Les α_{ik} étant des constantes, telles que $|\alpha_{ik}| \neq o$, et les α_i étant aussi des constantes.

Etant donné un continuum ponctuel n-dimensionnel, il est donc possible d'y attacher une fois pour toutes une multiplicité vectorielle linéaire à autant de dimensions, pourvu que les coordonnées qui permettent la discrimination des points du continuum ne soient soumises qu'à des transformations linéaires. Une fois que ce rattachement est fait et pour autant qu'il reste valable, le continuum est dit *constituer une multiplicité ponctuelle linéaire n-dimensionnelle.* La géométrie d'une multiplicité linéaire (ponctuelle ou vectorielle) est dite *géométrie affine* ou *géométrie linéaire.*

CHAPITRE II

PREMIÈRE DÉFINITION DES TENSEURS.

ALGÈBRE TENSORIELLE.

Reprenons la multiplicité vectorielle linéaire à n dimensions que nous avons définie dans le chapitre précédent. Nous avons reconnu l'existence de deux espèces de séries de n variables : si, par une transformation de coordonnées, les vecteurs de base $(\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_n)$ se changent en les nouveaux vecteurs de base $(\overline{\mathbf{u}}_1, \dots \overline{\mathbf{u}}_n)$ suivant les formules :

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_i^k \mathbf{u}_k$$

qui résolues donnent :

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_i^k \overline{\mathbf{u}}_k.$$

les séries de la 1re espèce, celles qui sont covariantes $(\xi_1, \dots \xi_n)$ se transforment, suivant les mêmes formules que les $\mathbf{u}$:

$$\overline{\xi}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_i^k \xi_k$$

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_i^k \overline{\xi}_k \qquad (1)$$

les séries de la seconde espèce $(\eta^1, \dots \eta^n)$, celles qui sont contravariantes, se transforment suivant les formules :

$$\bar{\eta}^i = \sum_{k=1}^{k=n} \beta^i_k \eta^k$$

$$\eta^i = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha^i_k \bar{\eta}^k \qquad \text{(II)}$$

La nature de ces séries de variables est caractérisée typographiquement par la position de l'indice de chaque variable.

Nous allons alors partir d'un nombre quelconque de ces séries et en former des fonctions dont la nature pour l'instant pourra nous paraître essentiellement formelle ; c'est plus tard (chap. III) que nous en verrons l'origine véritable. Néanmoins puisque les notions développées jusqu'ici nous permettent d'élaborer déjà la notion de tenseur, il est naturel que nous tirions de ces notions-là tout ce qu'elles peuvent donner.

Choisissons un système de coordonnées $(\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n)$ et soient k séries de variables, q covariantes et p contravariantes : $(\xi^1, \ldots \xi^n)$, $(\eta^1 \ldots \eta^n)$, $(\zeta_1 \ldots \zeta_n)$, $(\tau^1 \ldots \tau^n)$ (pour fixer les idées, prenons $p = 3$, $q = 1$; $k = 4$).

Avec ces séries, construisons une forme qui soit linéaire par rapport à chacune d'elles ; elle est donc de degré k en l'ensemble des séries. Le terme général de cette fonction F est donc un monôme qui contient une fois et une seule une variable de chaque série, soit : $\xi^i \eta^l \zeta_m \tau^r$; désignons par $a_{il}{}^m{}_r$ le coefficient de ce monôme. La fonction F s'écrit donc :

$$F = \sum_{i,\,l,\,m,\,r}^{1 \ldots n} a_{il}{}^m{}_r \xi^i \eta^l \zeta_m \tau^r,$$

la sommation étant étendue à tous les *arrangements avec répétitions* des n indices 1, 2, ... n pris k à k.

Posons encore que la valeur de F est indépendante du système de coordonnées choisi. F est dit alors un ***tenseur*** du $k^{\text{ième}}$ **ordre** (4e ordre), p fois ***covariant*** (3 fois covariant) et q fois ***contravariant*** (1 fois contravariant) ; les coefficients $a_{il}{}^m{}_r$ sont dits les *composantes* du tenseur F dans le système de coordonnées considéré.

Changeons maintenant de système de coordonnées ; et soient $(\bar{\mathbf{u}}_1, \ldots \bar{\mathbf{u}}_n)$ les nouveaux vecteurs de base liés aux anciens par les formules (1) et (2). Que devient alors la forme de F ? F s'exprimera dans le nouveau système au moyen des variables sur-

lignées liées aux anciennes par des formules du type I ou du type II suivant leur nature ; puisque ces formules sont linéaires, il s'ensuit que F est encore une fonction linéaire en chacune des k séries de n variables surlignées:

$$F = \sum_{s,\,t,\,u,\,v}^{1\ldots n} \bar{a}_{st}{}^{u}{}_{v} \bar{\xi}^{s} \bar{\eta}^{t} \bar{\zeta}_{u} \bar{\tau}^{v}$$

en désignant par $\bar{a}_{st}{}^{u}{}_{v}$ le coefficient du produit $\bar{\xi}^{s}\bar{\eta}^{t}\bar{\zeta}_{u}\bar{\tau}^{v}$.

Un tenseur conserve donc la même forme quel que soit le système de coordonnées auquel il est rapporté. Ses composantes ont évidemment changé ; quelles relations y a-t-il entre les nouvelles et les anciennes ? Puisqu'on a :

$$\sum_{s,\,t,\,u,\,v} \bar{a}_{st}{}^{u}{}_{v} \bar{\xi}^{s} \bar{\eta}^{t} \bar{\zeta}_{u} \bar{\tau}^{v} = \sum_{i,\,l,\,m,\,r} a_{il}{}^{m}{}_{r} \xi^{i} \eta^{l} \zeta_{m} \tau^{r} \tag{1}$$

et que cette égalité doit avoir lieu quels que soient les nombres ξ, η, ζ, τ, et $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\tau}$ liés par des relations (I) ou (II) suivant leur nature, il s'ensuit qu'elle est une identité par rapport à certaines d'entre elles (les nouvelles, par exemple) quand on a remplacé les autres (les anciennes) par leurs expressions en fonctions de celles-là (des nouvelles). Faisons ce remplacement, il vient :

$$\sum_{s,\,t,\,u,\,v} \bar{a}_{st}{}^{u}{}_{v} \bar{\xi}^{s} \bar{\eta}^{t} \bar{\zeta}_{u} \bar{\tau}^{v} = \sum_{i,\,l,\,m,\,r} a_{il}{}^{m}{}_{r} \Big(\sum_{s} \alpha^{i}_{s} \bar{\xi}^{s}\Big)\Big(\sum_{t} \alpha^{l}_{t} \bar{\eta}^{t}\Big)\Big(\sum_{u} \beta^{u}_{m} \bar{\zeta}_{u}\Big)\Big(\sum_{v} \alpha^{r}_{v} \bar{\tau}^{v}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{i,\,l,\,m,\,r\\ s,\,t,\,u,\,v}} \alpha^{i}_{s} \alpha^{l}_{t} \beta^{u}_{m} \alpha^{r}_{v} a_{il}{}^{m}{}_{r} \bar{\xi}^{s} \bar{\eta}^{t} \bar{\zeta}_{u} \bar{\tau}^{v}. \quad {}^{*})$$

Identifions alors les coefficients de $\bar{\xi}^{s}\bar{\eta}^{t}\bar{\zeta}_{u}\bar{\tau}^{v}$ dans les deux membres : il n'y a pas de dificulté, mais le lecteur peu familiarisé avec le maniement de nombreux indices, maniement qui caractérise en quelque manière le nouveau calcul, doit prêter une attention soutenue à ces premières opérations. Le coefficient dans le second membre s'obtient de la manière suivante : on porte son attention sur les termes en $\bar{\xi}^{s}\bar{\eta}^{t}\bar{\zeta}_{u}\bar{\tau}^{v}$, c'est dire qu'on suspend la sommation par rapport aux indices s, t, u, v ; on a donc :

$$\bar{a}_{st}{}^{u}{}_{v} = \sum_{i,\,l,\,m,\,r} \alpha^{i}_{s} \alpha^{l}_{t} \beta^{u}_{m} \alpha^{r}_{v} a_{il}{}^{m}{}_{r}. \tag{2}$$

*) Car il est clair qu'on peut intervertir les signes Σ.

Si l'on avait exprimé que l'égalité (1) est une identité en les variables ξ, η, ζ, τ, on eût obtenu :

$$a_{il}{}^{m}{}_{r} = \sum_{s,\, t,\, u,\, v} \beta_i^s \beta_l^t \alpha_u^m \beta_r^v \overline{a}_{st}{}^{u}{}_{v} \tag{3}$$

Les composantes du tenseur F se transforment donc suivant des formules linéaires ; elles se transforment d'ailleurs, comme il est aisé de le voir, de la même manière que les produits de variables d'espèces convenables : les $a_{il}{}^{m}{}_{r}$ se transforment comme un produit de la forme $\lambda_i \mu_l \nu^m \rho_r$ (par conséquent $\overline{a}_{st}{}^{u}{}_{v}$ se transforme comme le produit : $\overline{\lambda}_s \overline{\mu}_t \overline{\nu}^u \overline{\rho}_v$).

C'est cette remarque qui justifie les dénominations suivantes : On dit que le tenseur F est covariant suivant les indices i, l, r et qu'il est contravariant suivant l'indice m. C'est pourquoi nous avons représenté les composantes du tenseur au moyen d'une lettre affectée d'indices placés d'une manière qui, à première vue, paraît incompréhensible, mais dont on voit bien maintenant la raison. Pour l'instant, rien ne nous oblige d'ailleurs à écrire $a_{il}{}^{m}{}_{r}$, on aurait pu aussi bien écrire a^m_{ilr}. Mais plus tard, des distinctions assez délicates nous contraindront à utiliser la première notation plutôt que la seconde.

Par conséquent, ce qui caractérise un tenseur, c'est tout d'abord son *ordre* (k) puis sa *nature* qu'on représente par la position des indices de ses composantes (p fois covariant, et q fois contravariant).

On voit d'autre part que ce qui importe dans la définition du tenseur F, ce ne sont pas tant les séries particulières : ξ^i, η^l, ζ_m, τ^r, au moyen desquelles il s'exprime, que *la nature même* de ces séries, et par suite la nature des composantes $a_{il}{}^{m}{}_{r}$. Une fois que l'ordre et la nature du tenseur sont définis et que ses composantes sont données, celles-ci fonctionnent dans leur ensemble comme un *opérateur*, créant des formes multilinéaires, et qui appliqué à certaines séries de variables dont l'espèce est bien déterminée, mais dont le choix est arbitraire, donne des nombres indépendants du système de coordonnées choisi. Par exemple, les $a_{il}{}^{m}{}_{r}$, appliquées dans leur ensemble aux variables ξ^i, η^l, ζ_m, τ^r, donnent un nombre F indépendant du système de coordonnées, c'est pourquoi on dit que F est un *invariant* ; de même si on les applique à 4 séries de variables λ^i, μ^l, ν_m, ρ^r, on obtient un tenseur

$$G = \sum_{i,\, l,\, m,\, r} a_{il}{}^{m}{}_{r} \lambda^{i} \mu^{l} \nu_{m} \rho^{r}$$

qui est un nombre dépendant de ces séries, bien entendu, mais indépendant du système de coordonnées choisi, c'est-à-dire que l'on a encore :

$$G = \sum_{i,\, l,\, m,\, r} \bar{a}_{il}{}^{m}{}_{r} \bar{\lambda}^{i} \bar{\mu}^{l} \bar{\nu}_{m} \bar{\rho}^{r}.$$

Ces remarques évidentes auront leur importance dans la suite.

Les opérations fondamentales de l'algèbre tensorielle sont : *l'addition*, la *multiplication* et la *contraction*.

Addition. — La somme de h tenseurs du même ordre et de même nature, portant sur les mêmes séries de variables est un *tenseur de même ordre et de même nature.* Les composantes du tenseur somme sont égales respectivement à la somme des composantes de mêmes indices des tenseurs donnés.

Ce théorème est évident ; prenons un exemple où $h = 2$. Soient:

$$G = \sum_{ilmr} a_{il}{}^{mr} \xi^{i} \eta^{l} \zeta_{m} \tau_{r}$$

$$H = \sum_{ilmr} b_{il}{}^{mr} \xi^{i} \eta^{l} \zeta_{m} \tau_{r}$$

deux tenseurs de même ordre et de même nature ; le tenseur :

$$I = \sum_{ilmr} c_{il}{}^{mr} \xi^{i} \eta^{l} \zeta_{m} \tau_{r}$$

où

$$c_{il}{}^{mr} = a_{il}{}^{mr} + b_{il}{}^{mr}$$

est égal à la somme des deux tenseurs donnés :

$$I = G + H.$$

Cette règle n'est pas autre chose que la règle qui donne la somme de deux polynômes par réduction des termes semblables.

Multiplication. — Soient deux tenseurs

$$F = \sum_{ik} a_{ik} \xi^{i} \eta^{k}$$

$$G = \sum_{lm} b_{l}{}^{m} \zeta^{l} \tau_{m}$$

portant sur des séries différentes de variables. Le produit de ces deux formes, effectué comme on effectue ordinairement le produit de deux polynômes, c'est-à-dire en multipliant tous les termes de l'une des formes par chacun des termes de l'autre et en additionnant les résultats, est un nouveau tenseur H.

$$H = FG = \sum_{ik} a_{ik}\xi^i\eta^k \cdot \sum_{lm} b_l^m \zeta^l \tau_m$$

ou

$$H = \sum_{iklm} c_{ikl}^m \xi^i \eta^k \zeta^l \tau_m$$

en posant :

$$c_{ikl}^m = a_{ik} b_l^m$$

Par conséquent, le *produit* d'un tenseur d'ordre $p_1 + q_1$ (p_1 fois covariant et q_1 fois contravariant) par un tenseur d'ordre $p_2 + q_2$, *est un tenseur d'ordre* $(p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)$ [$(p_1 + p_2)$ fois covariant, $(p_2 + q_2)$ fois contravariant]. Les composantes du tenseur produit sont égales respectivement aux produits des composantes du premier tenseur par les composantes du second. Remarquons en passant que, d'après cette règle, on obtient un tenseur auquel il ne manque aucun terme, si les tenseurs facteurs n'ont pas de lacunes, c'est-à-dire s'ils possèdent les termes correspondant à tous les arrangements complets des indices. En effet, le premier tenseur contient $n^{p_1+q_1}$ termes, le deuxième $n^{p_2+q_2}$; le tenseur produit en contient d'après la manière d'effectuer la multiplication :

$$n^{p_1+q_1} \cdot n^{p_2+q_2}$$

c'est-à-dire :

$$n^{(p_1+p_2)+(q_1+q_2)}$$

qui est bien le nombre des arrangements avec répétition de n lettres prises $(p_1 + p_2 + q_1 + q_2)$ à $(p_1 + p_2 + q_1 + q_2)$.

Contraction. — Considérons le tenseur mixte du second ordre dont les composantes sont a_i^k. Je dis que $\sum_i a_i^i$ est un *invariant*, c'est-à-dire que c'est un nombre indépendant du système de coordonnées; en d'autres termes :

$$\sum a_i^i = \sum_i \bar{a}_i^i$$

où les $\bar{a}_i^k$ désignent les composantes du tenseur donné dans le sys-

tème de coordonnées $(\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n)$. D'après les formules de transformation (I) et (II) et d'après la règle de transformation des composantes d'un tenseur, on a en effet :

$$\bar{a}_i{}^k = \sum_{r,s} \alpha_i^r \beta_s^k a_r{}^s$$

donc :

$$\bar{a}_i{}^i = \sum_{r,s} \alpha_i^r \beta_s^i a_r{}^s$$

par suite :

$$\sum_i \bar{a}_i{}^i = \sum_{rsi} \alpha_i^r \beta_s^i a_r{}^s = \sum_{r,s} a_r{}^s \sum_i \alpha_i^r \beta_s^i$$

Mais au chapitre I, nous avons vu que :

$$\sum_i \alpha_i^r \beta_s^i = \delta_s^r \begin{cases} = 1 \ (r = s) \\ = 0 \ (r \neq s) \end{cases}.$$

Par conséquent :

$$\sum_i \bar{a}_i{}^i = \sum_{rs} \delta_s^r a_r{}^s = \sum_r a_r^r$$

puisque les seuls termes de la somme du deuxième membre qui ne sont pas nuls sont ceux pour lesquels $r = s$. De plus puisqu'une somme ne dépend pas du nom de l'indice par rapport auquel on somme, on a bien :

$$\sum_i \bar{a}_i{}^i = \sum_i a_i{}^i.$$

A partir d'un tenseur mixte d'un second ordre, nous avons obtenu un invariant grâce à une opération extrêmement simple : la sommation de certaines composantes bien déterminées de ce tenseur mixte, celles dont l'indice inférieur est égal à l'indice supérieur.

Cette règle se généralise aisément ; celle qui vient d'être obtenue forme d'ailleurs l'élément essentiel de la démonstration. Soit un tenseur d'ordre $(p + q)$ (p fois covariant et q fois contravariant) ; considérons parmi ses composantes, celles dont un indice supérieur situé à une place bien déterminée est égal à un indice inférieur situé à une place déterminée aussi ; sommons toutes ces composantes là, suivant l'indice commun sur lequel nous portons notre attention ; le résultat de cette somme est la composante générale d'un tenseur nouveau d'ordre $p + q - 2$ [$(p - 1)$ fois covariant $(q - 1)$ fois contravariant]. Pour fixer les idées, considérons le

tenseur dont les composantes sont $a_{ij}{}^{lm}{}_r (p = 3, \ q = 2)$; prenons toutes les composantes pour lesquelles $j = m$, $a_{ij}{}^{lj}{}_r$ et sommons par rapport à l'indice j commun,

$$\sum_j a_{ij}{}^{lj}{}_r = b_i{}^l{}_r$$

je dis que les $b_i{}^l{}_r$ sont les composantes d'un tenseur du 3ᵉ ordre $(p + q - 2)$. En effet, le tenseur $\sum_{ijlmr} a_{ij}{}^{lm}{}_r \xi^i \eta^j \zeta_l \tau_m \psi^r$ peut s'écrire :

$$\sum_{jm} \left(\sum_{ilr} a_{ij}{}^{lm}{}_r \xi^i \zeta_l \psi^r \right) \eta^j \tau_m$$

ce qui prouve que

$$\sum_{ilr} a_{ij}{}^{lm}{}_r \xi^i \zeta_l \psi^r = c_j{}^m$$

représente la composante $({}_j{}^m)$ d'un tenseur mixte du second ordre. Mais $\sum_i c_i{}^i$ est un invariant, donc :

$$\sum_{ilr} \sum_j a_{ij}{}^{lj}{}_r \xi^i \zeta_l \psi^r$$

est un invariant, ou encore en effectuant la somme intérieure :

$$\sum_{ilr} b_i{}^l{}_r \xi^i \zeta_l \psi^r = \text{invariant} ;$$

ce qui prouve que les $b_i{}^l{}_r$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 3.

L'opération qui permet ainsi d'obtenir à partir d'un tenseur d'ordre $p + q$, un nouveau tenseur d'ordre $p + q - 2$ est la *contraction* *.

On peut continuer :

$$\sum_i b_i{}^i{}_r = d_r$$

est une composante d'un nouveau tenseur covariant du 1ᵉʳ ordre, or :

* Les géomètres allemands appellent cette opération *Verjüngung* (rajeunissement) ; c'est M. *Langevin*, dans son cours au Collège de France qui a introduit le terme heureux de *contraction*.

$$\sum_{j,i} a_{ij}{}^{ij}{}_r = d_r$$

par conséquent, on peut contracter une deuxième fois le tenseur dont les composantes sont, les a. Plus généralement on peut contracter un tenseur d'ordre $(p+q)$ un nombre de fois égal au plus petit des nombres p et q.

Pour simplifier l'écriture, M. Einstein a imaginé une convention ingénieuse. Toutes les fois que dans une expression intervient une sommation portant sur un indice qui est à la fois covariant et contravariant, on supprime le signe $\sum$, en convenant bien entendu que le simple fait pour un même indice de coexister sur la ligne supérieure et sur la ligne inférieure des indices implique une sommation par rapport à cet indice. Ainsi $a_i{}^i$ voudra dire (à moins de mention expresse), $\sum_i a_i{}^i$. On écrira :

$$a_{ij}{}^{lj}{}_r = b_i{}^l{}_r$$

$$a_{ij}{}^{ij}{}_r = d_r.$$

Puisque les séries de variables covariantes ou contravariantes sont les composantes de tenseurs du premier ordre covariants ou contravariants, les tenseurs tels que nous les avons définis sont déjà des exemples particuliers de contraction.

En effet, le tenseur :

$$F = \sum_{ikl} a_{ik}{}^l \xi^i \eta^k \zeta_l$$

n'est pas autre chose que la contraction triple du tenseur dont les composantes sont :

$$c_{ik}{}^{lst}{}_v = a_{ik}{}^l \xi^s \eta^t \zeta_v$$

et où l'on a fait : $i = s, \quad k = t, \quad l = v.$

$$F = c_{ik}{}^{lik}{}_l.$$

On peut donc écrire aussi suivant notre convention :

$$F = a_{ik}{}^l \xi^i \eta^k \zeta_l.$$

CHAPITRE III

FORMES BILINÉAIRES ET QUADRATIQUES
GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE
NOUVELLE DÉFINITION DES TENSEURS

Dans le plan ou dans l'espace, les théorèmes de la géométrie élémentaire ou de la trigonométrie sphérique donnent immédiatement la longueur d'un vecteur quand on a choisi une unité de longueur et quand on connaît ses composantes dans un système de coordonnées. Au lieu de partir de ces notions familières, il nous paraît plus profitable de définir la métrique d'une multiplicité linéaire de vecteurs à un nombre quelconque n de dimensions et d'appliquer ensuite les théorèmes généraux auxquels ces définitions conduisent aux deux cas particuliers que nous venons de rappeler. Nous aurons alors d'un coup d'œil, pour ainsi dire, la signification intuitive de nos nouvelles notions.

L'algorithme fondamental pour l'introduction d'une métrique dans la géométrie linéaire est celui de *forme bilinéaire* de deux vecteurs et de *forme quadratique* d'un vecteur.

Une forme bilinéaire de deux vecteurs est un *tenseur deux fois covariant* qui porte sur les deux séries de variables, représentant chacune les composantes contravariantes des deux vecteurs ; en d'autres termes, une forme bilinéaire de deux vecteurs est une forme qui est linéaire par rapport à chacun d'eux, au sens que nous avons donné à ces termes dans le chapitre I.

Soient $(\xi^1 \dots \xi^n)$ et $(\eta^1 \dots \eta^n)$ les composantes contravariantes de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$; le tenseur

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = a_{ik}\xi^i\eta^k$$

est une forme bilinéaire, dont les a_{ik} sont dits les coefficients ; cette forme est non dégénérée si le déterminant $|a_{ik}| \neq 0$. La forme est *symétrique*, si l'on a toujours, quels que soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$:

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Q(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

dans ce cas :

$$a_{ik}\xi^i\eta^k = a_{ik}\xi^k\eta^i$$

quels que soient les ξ et les η, donc : $a_{ik} = a_{ki}$.

Faisons $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, alors :

$$Q\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = Q\ (\mathbf{x}) = a_{ik}\xi^i\xi^k$$

est dite une *forme quadratique* du vecteur $\mathbf{x}$.

Par ce procédé d'identification des arguments, on fait correspondre à une forme bilinéaire, une et une seule forme quadratique. La réciproque de cette proposition n'a pas de sens précis. Soit en effet, une forme quadratique :

$$b_{ik}\xi^i\xi^k, \tag{1}$$

on peut montrer aisément qu'elle peut provenir d'une infinité de formes bilinéaires par identification des deux arguments ; on peut l'écrire :

$$\sum_i b_{ii}\xi^i\xi^i + \sum_{i,\,k}^{i \neq k}(b_{ik} + b_{ki})\xi^i\xi^k.$$

où la deuxième sommation s'étend seulement aux combinaisons des indices i et k. La forme bilinéaire

$$a_{ik}\xi^i\eta^k \tag{2}$$

engendre la forme quadratique (1) si

$$a_{ii} = b_{ii} \qquad \text{et} \qquad a_{ik} + a_{ki} = b_{ik} + b_{ki}\ ;$$

or si on se donne les b_{rs}, ces équations ne déterminent pas univoquement les a_{ik}. Mais si l'on exige que la forme bilinéaire (2) soit symétrique, on voit qu'il y en a une et une seule qui engendre la forme (1), c'est celle dont les coefficients sont donnés par les équations :

$$a_{ik} = \frac{b_{ik} + b_{ki}}{2}.$$

Nous nous arrangerons dorénavant, ce qui est toujours possible d'une seule manière, à écrire *toute forme quadratique avec des coefficients symétriques* ($b_{ik} = b_{ki}$).
De cette manière, la forme bilinéaire :

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = c_{ik}\xi^i\eta^k$$

engendre la même forme quadratique que celle qu'engendre la forme bilinéaire symétrique :

$$\tfrac{1}{2}[Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y},\mathbf{x})].$$

On démontre dans les traités d'algèbre les théorèmes suivants : Toute forme quadratique $Q(\mathbf{x})$, non dégénérée (c'est-à-dire provenant d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée) est décomposable en une somme de carrés de formes linéaires du vecteur $\mathbf{x}$; ces formes linéaires sont au nombre de n et sont indépendantes.

Ces carrés peuvent être d'ailleurs précédés du signe moins ou du signe plus, mais *Hermite* a démontré que pour une forme quadratique donnée, les diverses décompositions possibles conduisent toujours au même nombre de carrés positifs et par conséquent au même nombre de carrés négatifs.

Une forme quadratique qui reste positive quel que soit l'argument $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, et qui ne s'annule que pour $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ est une forme *définie positive.* Si elle est toujours négative, sauf pour $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, argument pour lequel elle s'annule, elle est dite *définie négative.*

Une forme *définie est non dégénérée ;* si elle est définie positive, elle est une somme de n carrés tous positifs.

Produit scalaire de deux vecteurs. — Deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ déterminent un nombre $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ qu'on appelle leur produit scalaire et qui satisfait aux équations fonctionnelles suivantes :

1) $$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \mathbf{y}.\mathbf{x};$$

si $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}).\mathbf{y} = (\mathbf{u}.\mathbf{y}) + (\mathbf{v}.\mathbf{y}) ;$$

cette deuxième égalité entraîne

3) $$\lambda\mathbf{x}.\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}.\mathbf{y})$$

si λ est rationnel, nous posons que 3) est vraie quel que soit λ.

Les égalités 2) et 3) montrent que le produit scalaire est une forme linéaire par rapport au premier facteur ; l'égalité 1) montre,

à cause de la commutativité qu'elle exprime, que le produit scalaire est aussi linéaire par rapport au deuxième facteur, donc le produit est une forme bilinéaire des deux vecteurs ; toujours à cause de 1), on déduit que cette forme est symétrique :

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g_{ik}\xi^i\eta^k \, ; \qquad (g_{ik} = g_{ki})$$

les ξ^i et les η^k étant les composantes contravariantes du vecteur dans le système de coordonnées choisi.

Le produit scalaire de $\mathbf{x}$ par lui-même est donné par la forme quadratique :

$$\mathbf{x}.\mathbf{x} = \mathbf{x}^2 = Q(\mathbf{x}) = g_{ik}\xi^i\xi^k.$$

Dès que l'on a choisi un vecteur unité $\mathbf{u}$, pour lequel $\mathbf{u}^2 = 1$, comme unité de mesure de longueur, le nombre $\mathbf{x}^2$ mesure le carré de la longueur du vecteur $\mathbf{x}$.

En géométrie élémentaire, et en général dans presque toutes les considérations d'ordre géométrique, la forme quadratique Q est définie positive, la longueur d'un vecteur est donc toujours un nombre réel ; mais dans la théorie de la relativité la forme Q, qui mesure le carré de la longueur des « *vecteurs d'univers* », n'est pas définie. Dans les considérations qui suivent — à moins de mention expresse — nous supposerons que Q est une forme quadratique non dégénérée quelconque.

Si une transformation linéaire (voir page 18) est telle qu'au vecteur $\mathbf{x}$, elle fasse correspondre le vecteur $\mathbf{x}'$ et que l'on ait, pour tous les couples de vecteurs correspondants :

$$Q(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}'),$$

on dit qu'elle est une transformation *congruente* et que les *deux* vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont *congruents*. Une transformation congruente n'altère pas le produit scalaire de deux vecteurs, car si à $\mathbf{x}$ correspond $\mathbf{x}'$ et à $\mathbf{y}$ correspond $\mathbf{y}'$, à $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ correspond $\mathbf{x}'+\mathbf{y}'$; on a :

$$Q(\mathbf{x}'+\mathbf{y}',\ \mathbf{x}'+\mathbf{y}') = Q(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{x}+\mathbf{y})$$

mais puisque

$$Q(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{x}+\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + 2Q(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) + Q(\mathbf{y})$$

$$Q(\mathbf{x}'+\mathbf{y}',\ \mathbf{x}'+\mathbf{y}') = Q(\mathbf{x}') + 2Q(\mathbf{x}',\ \mathbf{y}') + Q(\mathbf{y}')$$

on en déduit :

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}',\mathbf{y}') \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ces deux vecteurs déterminent une grandeur que nous appellerons *l'angle* θ *des deux vecteurs ;* supposons que leurs longueurs soient égales à l'unité, nous poserons,

$$\cos \theta = Q(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Le vecteur $\lambda\mathbf{x}$ a pour longueur $\lambda = \sqrt{Q(\lambda\mathbf{x})}$,
le vecteur $\mu\mathbf{y}$ a pour longueur $\mu = \sqrt{Q(\mu\mathbf{y})}$
l'angle des deux vecteurs $\lambda\mathbf{x}$ et $\mu\mathbf{y}$ sera par définition le même que celui des deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, donc :

$$\cos \theta = \frac{Q(\lambda\mathbf{x}, \mu\mathbf{y})}{\lambda\mu},$$

on a donc pour tous les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$:

$$\cos \theta = \frac{Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\sqrt{Q(\mathbf{a}).Q(\mathbf{b})}} \tag{A}$$

Les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont orthogonaux si leur angle est droit, c'est-à-dire si $\cos \theta = 0$; dans ce cas

$$Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0.$$

Remarquons que si Q est une forme indéfinie, $|\cos \theta|$ peut être plus grand que l'unité. Ce n'est que si la forme Q est définie positive que l'on a toujours

$$|\cos \theta| \leqslant 1.$$

En effet, de

$$Q(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}) + 2\lambda\mu Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mu^2 Q(\mathbf{y}) \geqslant 0$$

on déduit que le discriminant :

$$Q^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}).Q(\mathbf{y})$$

est inférieur à zéro, donc :

$$\left| \frac{Q(\mathbf{x}.\mathbf{y})}{\sqrt{Q(\mathbf{x}).Q(\mathbf{y})}} \right| \leqslant 1$$

Composantes covariantes d'un vecteur. — Le tenseur symétrique dont les composantes sont les nombres g_{ik} appliqué aux deux vecteurs $\mathbf{x}(\xi^i)$ et $\mathbf{y}(\eta^i)$ détermine le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = g_{ik}\xi^i\eta^k. \tag{3}$$

Ce produit peut s'écrire autrement ; en effet, considérons le tenseur covariant du premier ordre dont les composantes sont les nombres $g_{ik}\xi^i$; une fois que le tenseur métrique est donné — et cela est fait une fois pour toutes — ce nouveau tenseur du premier ordre ne dépend que du vecteur **x** ; il en dépend linéairement même et par suite, ses différentes composantes sont des formes linéaires du vecteur **x**. Posons ;

$$g_{ik}\xi^i = \xi_k \qquad (k = 1, 2, \dots n) \tag{4}$$

les ξ_k sont appelés les *composantes covariantes* du vecteur **x**. Je dis que le vecteur est bien déterminé quand on connaît ses composantes covariantes. Il suffit, en effet, de faire voir que les n équations précédentes admettent une solution et une seule pour les ξ^i quand les seconds membres sont donnés ; or cela est évident puisque le déterminant du système n'est pas autre chose que le déterminant $|g_{ik}|$ des coefficients de la forme bilinéaire (3), cette forme, par hypothèse, n'étant pas dégénérée, on a bien $|g_{ik}| \neq 0$. On peut donc écrire :

$$\mathbf{xy} = \xi_k\eta^k.$$

Remarquons que, puisque $g_{ik} = g_{ki}$, on a :

$$g_{ik}\xi^i = g_{ki}\xi^i = \xi_k.$$

Par conséquent, on peut poser sans contradiction :

$$\eta_i = g_{ik}\eta^k.$$

et le produit scalaire des deux vecteurs peut encore s'écrire :

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \xi^k\eta_k.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est une forme bilinéaire de deux facteurs ; les coefficients de cette forme bilinéaire sont : ou bien les nombres g_{ik} si les vecteurs sont donnés par leurs composantes contravariantes, ou bien les nombres δ_i^k $\left(\begin{matrix} = 0 \\ = 1 \end{matrix} \begin{cases} \text{si } i \neq k \\ \text{si } i = k \end{cases}\right)$, si l'un des vecteurs est donné par ses composantes covariantes et l'autre par ses composantes contravariantes. Qu'arrive-t-il si les deux vecteurs sont donnés par leurs composantes covariantes ? Résolvons les équations (4) ; les ξ^i doivent s'exprimer linéairement en fonction des ξ_k et les coefficients de ces formes linéaires doivent être les composantes d'un tenseur contravariant du second ordre :

$$\xi^i = g^{ik}\xi_k,$$

or d'après la règle de Cramer g^{ik} est égal au facteur de l'élément g_{ik} dans le développement du déterminant $|g_{ik}|$, divisé par ce déterminant lui-même. Par conséquent, on peut encore écrire :

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \xi^i\eta_i = g^{ik}\xi_k\eta_i = g^{ik}\xi_i\eta_k$$

car les nombres g^{ik} sont évidemment tels, que $g^{ik} = g^{ki}$.

Le produit scalaire est donc encore un *tenseur contravariant* du second ordre dont les composantes sont les nombres g^{ik}. Il semble donc que la notion de tenseur métrique devienne ambiguë ; nous allons voir que si dans la géométrie affine, il est possible de définir un tenseur d'une manière telle que sa nature (p fois covariant et q fois contravariant) le caractérise en tout et partout, il en est tout autrement en géométrie métrique ; la nature d'un tenseur n'est plus univoque, seul son *ordre* k le caractérise parfaitement.

Modifions tout d'abord légèrement la définition donnée au chapitre I. Un tenseur d'ordre $(p+q)$ y était défini comme une fonction $(p+q)$ - linéaire de p séries de variables contravariantes et de q séries de variables covariantes. Cette fonction est un invariant pour les transformations linéaires de coordonnées. Cet invariant reste un invariant lorsqu'on remplace chaque série de variables contravariantes par les composantes contravariantes d'un certain vecteur et chaque série de variables covariantes par les composantes covariantes d'un certain vecteur. Le tenseur devient une forme multilinéaire invariante de $(p+q)$ vecteurs ; il est bien entendu que p de ces vecteurs sont donnés par leurs composantes contravariantes et q par leurs composantes covariantes.

Je dis qu'il est possible de lever cette dernière restriction et de définir le tenseur d'ordre k comme une forme k-linéaire de k vecteurs.

Pour le faire voir effectivement, prenons un cas particulier qui laisse entrevoir toutes les possibilités et qui permette de fixer nos idées tout en nous dispensant d'un flot d'explications.

Le tenseur A d'ordre $(3+1)$, dont les composantes sont $a_{ik}{}^l{}_m$ est une forme quadrilinéaire des quatre vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{t}$, donnés respectivement par leurs composantes ξ^i, η^k, ζ_l, τ^m :

$$A = a_{ik}{}^l{}_m\xi^i\eta^k\zeta_l\tau^m$$

mais, on peut introduire au lieu des ξ^i, par exemple, les ξ_r au moyen des relations :

$$\xi^i = g^{ir}\xi_r,$$

alors :

$$A = a_{ik}{}^{l}{}_{m} g^{ir} \xi_r \eta^k \zeta_l \tau^m$$

mais les nombres :

$$g^{ir} a_{ik}{}^{l}{}_{m} = b^{r}{}_{k}{}^{l}{}_{m}$$

sont les composantes d'un tenseur deux fois covariant et deux fois contravariant. Le tenseur A change donc de nature ; il reste une forme quadrilinéaire des vecteurs **x**, **y**, **z**, **t** ; nous dirons que les $b^{r}{}_{k}{}^{l}{}_{m}$ sont les composantes deux fois covariantes et deux fois contravariantes du tenseur A et puisqu'aucune confusion n'est possible, nous poserons $b^{r}{}_{k}{}^{l}{}_{m} = a^{r}{}_{k}{}^{l}{}_{m}$. On peut continuer ; puisque

$$\zeta_l = g_{ls}\zeta^s,$$

on aura, en posant :

$$g_{ls} a^{r}{}_{k}{}^{l}{}_{m} = a^{r}{}_{ksm},$$

$$A = a^{r}{}_{ksm} \xi_r \eta^k \zeta^s \tau^m.$$

On poursuit aisément et on généralise de même. Un tenseur d'ordre k peut s'exprimer au moyen de ses composantes k fois covariantes, ou de ses composantes $(k-1)$ fois covariantes et une fois contravariante, ou encore de ses composantes $(k-2)$ fois covariantes et deux fois contravariantes, etc... Ces différentes composantes sont caractérisées par la position et l'ordre des indices ; mais on passe des unes aux autres, grâce au tenseur métrique, de la manière suivante. Soient I et K deux groupes d'indices, on a pour « *abaisser* » un indice, la formule suivante :

$$a_{IrM} = g_{rs} a_{I}{}^{s}{}_{M}$$

et pour « *élever* » un indice, la formule suivante :

$$a_{I}{}^{r}{}_{M} = g^{rs} a_{IsM}.$$

Nous croyons avoir ainsi parfaitement éclairci la notion de tenseur ; la deuxième définition que nous venons d'en donner est plus souple que la première et plus riche d'applications variées. L'ensemble des composantes d'un tenseur est, avons-nous vu, un opérateur qui appliqué à un certain nombre de vecteurs donne une forme multi linéaire de ces vecteurs ; c'est cette forme qui est le tenseur ; mais par une ellipse commode, il nous arrivera souvent de parler

du tenseur g_{ik}, du tenseur $a_i{}^r{}_{lm}$, etc... au lieu de dire le tenseur dont les composantes deux fois covariantes sont les nombres g_{ik}, etc..., etc...

Symétrie des tenseurs. — Un tenseur d'ordre k est *symétrique* s'il conserve la même valeur quand on échange entre eux les vecteurs dont il dépend, d'une manière quelconque. Soit, par exemple, le tenseur $a_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l$; s'il ne change pas de valeur quand on échange entre eux les trois vecteurs **x**, **y**, **z**, c'est que l'on a :

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = a_{kil} = a_{ilk} = a_{lki} \,;$$

mais le tenseur donné peut encore s'écrire $a_{ik}{}^l\xi^i\eta^k\zeta_l$; si l'on échange de nouveau les vecteurs entre eux, c'est que l'on a :

$$a_{ik}{}^l = a_i{}^l{}_k = a^l{}_{ik} = a_{ki}{}^l = a_k{}^l{}_i = a^l{}_{ki} = g^{lr}a_{ikr}$$

on a de même

$$a_i{}^{kl} = a^k{}_i{}^l = a^{kl}{}_i = a^{lk}{}_i = a^l{}_i{}^k = a_i{}^{lk} = g^{lr}g^{ks}a_{irs}$$

enfin :

$$a^{ikl} = a^{kli} = a^{lik} = a^{kil} = a^{ilk} = a^{lki} = g^{ir}g^{ks}g^{lt}a_{rst}.$$

On peut donc écrire sans ambiguité $a^l_{\cdot k}$ a_i^{kl} au lieu d'écrire respectivement $a_{ik}{}^l$, etc... et $a_i{}^{kl}$, etc. C'est ce que nous ferons dorénavant pour presque tous les tenseurs symétriques *.

En particulier, si $T_{ik} = T_{ki}$ sont les composantes deux fois covariantes du tenseur du second ordre T, celui-ci admettra les composantes mixtes :

$$T_i{}^k = T^k{}_i = T^k_i.$$

Nous avons déjà reconnu ces particularités sur le tenseur métrique ; en effet :

$$g_{ir}g^{kr} = g_{ri}g^{rk} = g_i{}^k = g^k{}_i = \delta^k_i = \begin{cases} 0 \text{ (si } i \neq k.) \\ 1 \text{ (si } i = k.) \end{cases}$$

Un tenseur d'ordre k est *symétrique gauche* s'il conserve sa valeur quand on y échange les vecteurs dont il dépend, d'une manière telle que la permutation nouvelle des k vecteurs reste de la même classe, et s'il prend une valeur *opposée* (égale en valeur absolue, mais de signe contraire) quand la permutation nouvelle est de l'autre classe.

*) Les remarques précédentes sont générales et ne dépendent pas de l'ordre du tenseur symétrique considéré.

Prenons encore pour fixer les idées un tenseur du 3e ordre : $b_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l$. S'il est symétrique gauche, l'on doit évidemment avoir :

$$b_{ikl} = b_{kli} = b_{lik} = - b_{kil} = - b_{ilk} = - b_{lki}.$$

Les trois permutations *ikl*, *kli*, *lik* sont d'une classe, et les trois permutations *kil*, *ilk*, *lki* sont de l'autre classe. On en déduit que

$$b^i{}_{kl} = b_l{}^i{}_k = b_{kl}{}^i = - b^i{}_{lk} = - b_k{}^i{}_l = - b_{lk}{}^i$$

etc. etc...

On peut imaginer d'autres symétries. Nous allons étudier rapidement deux cas ; nous les retrouverons plus tard ; le premier se rapporte à certains tenseurs du troisième ordre symétriques par rapport à deux vecteurs bien déterminés parmi les trois dont ils dépendent. Soient $c_{ik,r}$ les composantes covariantes de ce tenseur C symétrique par rapport aux deux premiers vecteurs, c'est-à-dire tel que :

$$c_{ik,r}\,\xi^i\eta^k\zeta^r = c_{ki,r}\,\xi^i\eta^k\zeta^r$$

On a donc :

$$c_{ik,r} = c_{ki,r}\,;$$

par suite :

$$c_{ik}{}^r = c_{ki}{}^r\,; \qquad c^{ik,r} = c^{ki,r} \quad \text{et} \quad c^{ik}{}_r = c^{ki}{}_r.$$

Nous nous arrangerons toujours à écrire les deux premiers vecteurs avec des composantes de même nature, les deux groupes covariants ou les deux groupes contravariants. Les différentes manières d'écrire les composantes de ce tenseur partiellement symétrique sont donc les suivantes $c_{ik,r}$, c^r_{ik}, c^{ik}_r, $c^{ik,r}$; étant donnée la convention précédente, il n'y a donc aucune ambiguité à craindre.

Le second exemple se rapporte à un tenseur du 4e ordre, dont les composantes jouissent des propriétés suivantes :

$$r_{ik,lm} = - r_{ki,lm} = - r_{ik,ml},$$

$$r_{ik,lm} = r_{lm,ik}$$

ce qui signifie que le tenseur $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ est tel que les quatre vecteurs dont il dépend peuvent se grouper par paires : **x**, **y** et **z**, **t**. Le tenseur est symétrique par rapport à chacune d'elles, il est symétrique gauche par rapport aux deux vecteurs de chaque paire.

On en déduit : $r_i{}^i{}_{,lm} = r^i{}_{i,lm} = 0$ *.

De plus :

$$r^i{}_{k,im} = R_{km}$$

*) On a évidemment aussi $r_{ii,\,lm} = r_{ik,\,ll} = 0$.

est un tenseur du second ordre ; je dis qu'il est symétrique.

Il suffit de démontrer que :

$$r^i{}_{k,im} = r^i{}_{m,ik}$$

mais cette équation s'écrit aussi :

$$g^{ij}r_{jk,im} = g^{ij}r_{jm,ik} ;$$

or d'après les symétries supposées, le second membre s'écrit $g^{ij}r_{ik,jm}$, mais puisque $g^{ij} = g^{ji}$ on peut échanger i et j qui sont deux indices muets, par suite ce second membre devient $g^{ij}r_{jk,im}$. On a bien :

$$R_{km} = R_{mk}.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, il n'y a pas d'ambiguité à parler des composantes mixtes R_i^k. En contractant encore une fois, on obtient un invariant $R = R_i^i$.

Remarques sur les multiplicités ponctuelles linéaires. — Soit une multiplicité ponctuelle linéaire décrite à l'aide de certaines coordonnées $(x_1 \dots x_n)$, l'origine étant le point O (o,o...o) et $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2} \dots \overrightarrow{OA_n}$ étant les vecteurs de base d'un système de coordonnées, par rapport auquel nous repérons la multiplicité vectorielle linéaire que nous avons appris à adjoindre à la multiplicité ponctuelle. Les coordonnées des points A_i sont nulles sauf la $i^{ième}$ qui vaut u_i. La métrique de la multiplicité vectorielle étant donnée par le tenseur dont les composantes sont les nombres g_{ik}, nous nous arrangerons encore pour choisir les u_i de manière que les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ aient une longueur égale à l'unité. Soient alors $P(x_i)$ et $Q(y_i)$ deux points de la multiplicité, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour composantes contravariantes les nombres $\zeta^i = y_i - x_i$, le nombre l qui mesure sa longueur est dit encore la distance des deux points P et Q ; on a $l^2 = g_{ik}\zeta^i\zeta^k = \sum\limits_{ik} g_{ik}(y_i - x_i)(y_k - x_k)$. Si l'on change de coordonnées au moyen d'une transformation linéaire, la distance de deux points reste une forme quadratique des différences des coordonnées de même rang de ces deux points.

Applications au plan. — Il est temps de faire quelques applications des notions abstraites que nous venons de développer. Le

cas le plus simple et de beaucoup le plus familier est celui du plan.

Soient dans le plan deux vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ issus d'un même point O (fig. 5) : $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{u}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{u}_2$ et supposons-les de longueur égale à 1 ; désignons par θ l'angle qu'ils forment. Le vecteur $\overrightarrow{OR} = \mathbf{x}$ a pour composantes contravariantes les nombres ξ^1 et ξ^2 qui mesurent les segments OR_1 et R_1R. La géométrie élémentaire nous

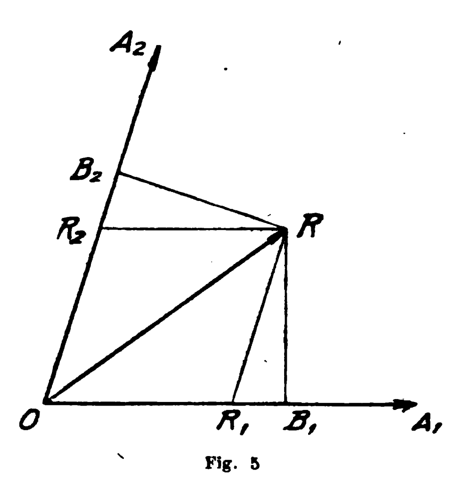


Fig. 5

montre tout de suite que le carré de la longueur du vecteur $\mathbf{x}$ est donné par la formule :

$$\mathbf{x}^2 = \overline{OR}^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + 2\xi^1\xi^2 \cos\theta,$$

c'est-à-dire que la forme métrique fondamentale est :

$$\xi^1\xi^1 + \xi^1\xi^2 . \cos\theta + \xi^2\xi^1 \cos\theta + \xi^2\xi^2$$

les g_{ik} sont donc :

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = g_{21} = \cos\theta, \qquad g_{22} = 1.$$

Les composantes covariantes du vecteur $\mathbf{x}$ sont donc :

$$\xi_1 = g_{1k}\xi^k = g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2 = \xi^1 + \xi^2 \cos\theta ;$$
$$\xi_2 = g_{2k}\xi^k = g_{21}\xi^1 + g_{22}\xi^2 = \xi^1 \cos\theta + \xi^2.$$

Géométriquement, il est visible que les composantes contravariantes du vecteur $\overrightarrow{OR}$ sont égales aux nombres qui mesurent les *projections orthogonales* de ce vecteur sur les vecteurs de base :

$\xi_1 = OB_1$, $\xi_2 = OB_2$. Résolvons les équations précédentes par rapport aux ξ^i, il vient :

$$\xi^1 = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\xi_1 - \cos\theta . \xi_2\right],$$

$$\xi^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[-\cos\theta . \xi_1 + \xi_2\right]$$

et par suite

$$g^{11} = \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad g^{12} = g^{21} = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}, \qquad g^{22} = \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

Ce sont bien les mineurs respectifs des éléments g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22} du déterminant :

$$| g_{ik} | = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\theta$$

divisés par ce déterminant lui-même. On vérifie aisément les formules

$$g_{ir}g^{kr} = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq k. \\ 0 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

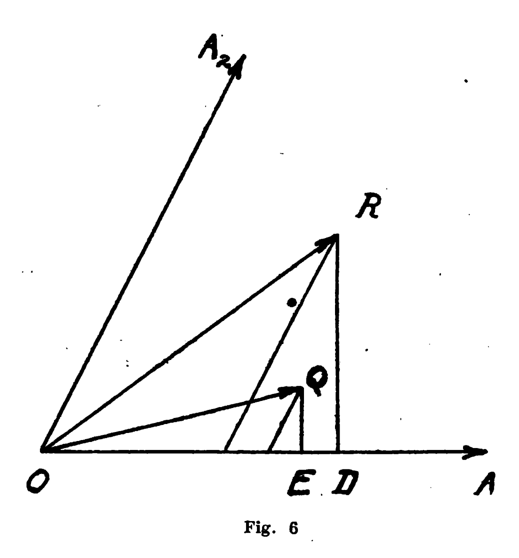


Fig. 6

Cherchons l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dont les composantes sont les nombres (ξ^i) et (η^i). Abaissons les perpendiculaires

des points R et Q sur l'un des axes $\overrightarrow{OA_1}$, par exemple (fig. 5) soient DR et EQ. On a en grandeur et en signe :

$$OE = \eta_1 \qquad\qquad OD = \xi_1$$
$$EQ = \eta^2 \sin\theta, \qquad\qquad DR = \xi^2 \sin\theta$$

Or, d'après une des formules les plus simples de la géométrie analytique, on a *:

$$\cos\alpha = \frac{OD.OE + EQ.DR}{OR.OQ} = \frac{\xi_1\eta_1 + \xi^2\eta^2\sin^2\theta}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k . g_{ik}\eta^i\eta^k}}.$$

Remplaçons ξ_1 et η_1 par leurs valeurs en fonction des ξ^i et η^i ; il vient :

$$\cos\alpha = \frac{(\xi^1 + \xi^2\cos\theta)(\eta^1 + \eta^2\cos\theta) + \xi^2\eta^2\sin^2\theta}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k . g_{ik}\eta^i\eta^k}}$$
$$= \frac{\xi^1\xi^1 + \xi^1\eta^2\cos\theta + \xi^2\eta^1\cos\theta + \xi^2\eta^2}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k . g_{ik}\eta^i\eta^k}}$$

ou

$$\cos\alpha = \frac{g_{ik}\xi^i\eta^k}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k . g_{ik}\eta^i\eta^k}}.$$

C'est bien la formule que nous avons donnée plus haut pour l'angle de deux vecteurs.

Considérons le tenseur symétrique gauche $T^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$ dont les seules composantes non nulles sont :

$$T^{12} = - T^{21} = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1.$$

Formons l'invariant

$$\tfrac{1}{2}\, T_{ik}T^{ki} = \tfrac{1}{2}\, g_{ir}g_{ks}T^{rs}T^{ik} = g_{1r}g_{2s}T^{rs}T^{12} = (T^{12})^2(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}.)$$

La racine carrée de cet invariant :

$$(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^2)\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}}$$

qui s'écrit ici :

$$\sin\theta\ (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)$$

est *l'aire* du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OQ}$; on s'en rend compte très facilement en utilisant la remarque * faite tout à l'heure.

*) Il suffit d'imaginer un système d'axes rectangulaires dont l'un est le support de $\mathbf{u}_1$, pour écrire immédiatement cette formule.

Applications à l'espace. — Dans l'espace, on obtient des résul-

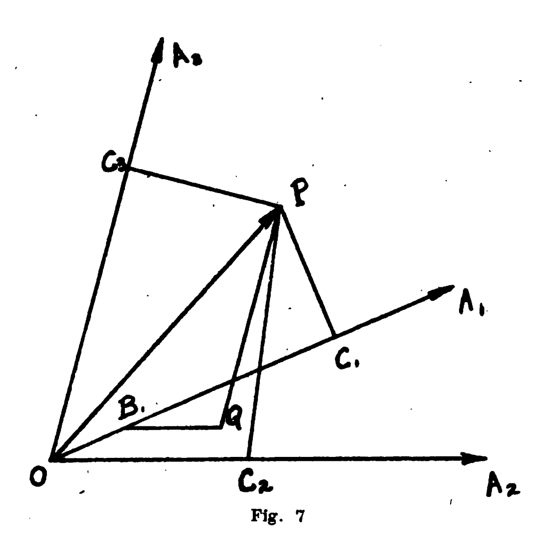


Fig. 7

tats analogues ; on prend trois vecteurs de base $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ de longueur égale à l'unité, soient λ, μ, ν les angles $(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$, $(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_1})$, $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$. Le carré de la longueur d'un vecteur $\overrightarrow{OP}$ dont les composantes contravariantes sont les nombres :

$$\xi^1 = OB_1, \quad \xi^2 = B_1Q, \quad \xi^3 = QP$$

est donné par la formule :

$$\overline{OP}^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + 2\,\xi^1\xi^2 \cos \nu + 2\,\xi^2\xi^3 \cos \lambda + 2\,\xi^3\xi^1 \cos \mu,$$

on a :

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = \cos\ \nu\ ;\ g_{23} = g_{32} = \cos\ \lambda,\ \ g_{31} = g_{13} = \cos\ \mu.$$

Abaissons de P des perpendiculaires PC_1, PC_2, PC_3 sur les trois axes. Les mesures des segments OC_1, OC_2 et OC_3 sont précisément encore les *composantes covariantes* du vecteur $\overrightarrow{OP}$. En effet, les deux contours polygonaux OB_1QP et OC_1P sont équivalents ; projetons-les sur OA_1. On a :

$$OC_1 = \xi^1 + \xi^2 \cos \nu + \xi^3 \cos \mu$$

car l'angle de $\overrightarrow{QP}$ avec $\overrightarrow{OA_1}$ est précisément μ.

On peut transformer l'égalité précédente :

$$OC_1 = g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2 + g_{13}\xi^3 = g_{1k}\xi^k = \xi_1.$$

On voit de même que :

$$OC_2 = \xi_2, \qquad OC_3 = \xi_3.$$

On verrait encore que l'angle de deux vecteurs (ξ^i) et (η^i) est donné par la formule (A) [p. 35]. De même l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est donné par la racine carrée de l'invariant : $\frac{1}{2} T_{ik}T^{ik}$, où $T^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$.

Nous aurons plus tard l'occasion de rencontrer des tenseurs plus ou moins compliqués ; c'est pourquoi pour l'instant nous n'irons pas plus avant dans les applications.

CHAPITRE IV

ANALYSE TENSORIELLE

Considérons une multiplicité ponctuelle linéaire M_n. Un point P de M_n est caractérisé par n coordonnées $x_1 \ldots x_n$, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$, où Q est le point $(y_1 \ldots y_n)$ a pour composantes contravariantes les nombres $\xi^i = y_i - x_i$. Nous avons vu plus haut que nos définitions sont invariantes pour toute transformation linéaire de coordonnées. Supposons que le point Q ait pour coordonnées des nombres très peu différents des coordonnées de P ; disons même que les y_i sont infiniment peu différents des x_i * ;

$$y_i = x_i + dx_i.$$

Les nombres dx_i sont alors les composantes contravariantes ** du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ dont la longueur l est donnée par l'équation :

$$l^2 = \sum_{ik}^{i \ldots n} g_{ik} dx_i dx_k.$$

Cette longueur étant infiniment petite, nous dirons que le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est infiniment petit.

Supposons qu'à chaque point P de la multiplicité M_n, nous fassions correspondre un tenseur ; c'est dire que ce tenseur est une fonction du point P, ses composantes sont donc des fonctions des

*) On sait quelles conventions implique cette manière de parler, nous n'y insistons pas.

**) Nous continuons à écrire dx^i plutôt que $(dx)^i$ ou dx^i malgré que les différentielles fussent contravariantes.

coordonnées $(x_1 \ldots x_n)$ et l'ensemble de tous ces tenseurs attachés à chaque point de M_n est un *champ de tenseurs*. L'objet de l'analyse tensorielle est l'étude des champs de tenseurs.

Considérons tout d'abord une fonction du point P indépendante du système linéaire de coordonnées choisi ; cette fonction définit un champ d'invariants ou, comme on dit, un champ scalaire :

$$I = f(x_1, \ldots x_n) = f(x),$$

changeons de coordonnées au moyen des formules

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i \bar{x}_k + \alpha_i ;$$

la fonction $f(x)$ devient une fonction $\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n) = \bar{f}(\bar{x})$; on a :

$$f(x) = \bar{f}(\bar{x}).$$

Les coordonnées du point P sont devenues $\bar{x}_i$ et celles du point infiniment voisin $Q(x + dx)$ sont maintenant $\bar{x}_i + d\bar{x}_i$, les $d\bar{x}_i$ sont liés aux dx_i par les relations :

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i d\bar{x}_k.$$

Or la différentielle de f, c'est-à-dire sa variation quand on considère cette fonction, en P et en Q est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

la variation $d\bar{f}$ de $\bar{f}(\bar{x})$ est de même :

$$d\bar{f} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_1} d\bar{x}_1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_2} d\bar{x}_2 + \cdots + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_n} d\bar{x}_n$$

cependant $df = d\bar{f}$ puisque I est un invariant, de plus les différentielles étant des variables contravariantes, l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i$$

qui montre que les deux séries de variables $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ et (dx_i) sont

contragrédientes, prouve du même coup que les nombres $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$ sont les composantes *covariantes d'un tenseur* du premier ordre, ou si l'on veut, sont les *composantes covariantes* d'un *vecteur*, qu'on appelle quelquefois le *gradient* du scalaire f. On a donc :

$$f_i \xi^i = \overline{f}_i \overline{\xi}^i$$

où $\overline{f}_i = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}$ et où les ξ^i sont les composantes d'un vecteur indépendant du lieu.

Cet exemple simple nous permet de poursuivre. Soit un champ de tenseurs du 4e ordre : $a_{ik}{}^{l}{}_{m}(x_1 \dots x_n)$; prenons quatre vecteurs **x**, **y**, **z**, **t**, indépendants du lieu et formons l'invariant :

$$a_{ik}{}^{l}{}_{m}\, \xi^i \eta^k \zeta_l \tau^m = f(x_1 \dots x_n)$$

qui définit un champ scalaire. Si l'on change de coordonnées, ce champ prend la forme :

$$\overline{a}_{ik}{}^{l}{}_{m} \overline{\xi}^i \overline{\eta}^k \overline{\zeta}_l \overline{\tau}^m = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_n).$$

D'après les premières considérations que nous avons faites, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}_r} d\overline{x}_r,$$

ou, puisque seuls les $a_{ik}{}^{l}{}_{m}$ sont variables :

$$\frac{\partial a_{ik}{}^{l}{}_{m}}{\partial x_r} \xi^i \eta^k \zeta_l \tau^m dx_r = \frac{\partial \overline{a}_{ik}{}^{l}{}_{m}}{\partial \overline{x}_r} \overline{\xi}^i \overline{\eta}^k \overline{\zeta}_l \overline{\tau}^m d\overline{x}_r.$$

Cette égalité prouve que les nombres :

$$a_{ik}{}^{l}{}_{mr} = \frac{\partial a_{ik}{}^{l}{}_{m}}{\partial x_r}$$

sont les composantes d'un tenseur du 5e ordre.

Ainsi à partir du champ tensoriel d'ordre k, on forme, par la dérivation des composantes, un tenseur d'ordre $k+1$.

Puisque les g_{ik} sont des constantes, on tire de l'équation précédente :

$$g^{jk} a_{ik}{}^{l}{}_{mr} = g^{jk} \frac{\partial a_{ik}{}^{l}{}_{m}}{\partial x_r} = \frac{\partial (g^{jk} a_{ik}{}^{l}{}_{m})}{\partial x_r}$$

ou :

$$a_{i}{}^{jl}{}_{mr} = \frac{\partial a_{i}{}^{jl}{}_{m}}{\partial x_r}.$$

La dérivation et l'élévation (ou l'abaissement) *d'un indice sont deux opérations commutatives.*

On peut donner une forme symbolique à l'opération de différentiation. Si l'on considère les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n}$$

comme les composantes covariantes d'un vecteur **d**, les composantes du tenseur, dérivé d'un tenseur donné, sont les composantes du tenseur *produit du tenseur donné par ce vecteur symbolique.*

Il est bien évident que l'on peut dériver autant de fois que l'on veut, c'est-à-dire multiplier par le vecteur symbolique **d**, autant de fois que l'on désire.

Nous allons prendre quelques exemples simples dans l'espace à trois dimensions qui nous est familier.

I. Imaginons l'espace rempli d'un fluide dont la température est en chaque point le nombre $T\,(x_1 \ldots x_n)$; le vecteur dont les composantes covariantes sont les nombres $\xi_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}$, n'est pas autre chose que le *gradient de la température.*

II. Supposons qu'à l'origine des coordonnées on ait placé une masse m. En chaque point $P(x_1 \ldots x_n)$, elle crée un potentiel :

$$V = \frac{m}{\sqrt{\sum\limits_{i,\,k}^{1 \ldots n} g_{ik} x_i x_k}},$$

le gradient $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V}{\partial x_3}$ mesure le *champ* de force créé en P par la masse attirante m. Les composantes covariantes de cette force sont les nombres :

$$\tau_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{m}{(\sqrt{g_{ik} x_i x_k})^3} \cdot \sum_k g_{ik} x_k = m \frac{\xi_i}{r^3},$$

en désignant par ξ_i les composantes covariantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ et par r sa longueur. Dérivons le vecteur **y**, dont les composantes

sont les nombres η ; on obtient le tenseur du second ordre dont les composantes sont $\eta_{ik} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}$; considérons ses composantes mixtes $\eta^i{}_k = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_k}$, et contractons par rapport à l'indice i, on forme ainsi l'invariant

$$I = \eta^i{}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ir}\frac{\partial V}{\partial x_r}\right) = \text{div } \mathbf{y} = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_i} = \Delta V.$$

On sait qu'en dehors des masses attirantes $\Delta V = 0$, vérifions-le. On a :

$$\eta^i = m\frac{\xi^i}{r^3}$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \eta^i}{\partial x_i} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} - \frac{3\xi^i}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i},$$

or

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3\,; \qquad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{g_{ik}x_k}{r}\,; \qquad x_i = \xi^i,$$

donc :

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \eta^i}{\partial x_i} = \frac{3}{r^3} - \frac{3\,g_{ik}x_k x_i}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0. \ *$$

III. Etant donné un champ de vecteurs ξ_i, formons le tenseur symétrique gauche :

$$c_{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Dans l'espace à 3 dimensions, ce tenseur n'ayant que trois composantes distinctes c_{12}, c_{23}, c_{31}, on le représente par un vecteur contravariant qu'on nomme le curl de **x** **. Le curl d'un gradient est toujours nul, car $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ où f est un scalaire et les c_{ik} sont les différences de deux mêmes dérivées secondes.

Remarquons qu'en général, le curl, ou mieux le tenseur c_{ik} n'est pas un vecteur ; il ne peut pas être non plus représenté par un vecteur.

*) Dans ces dernières formules les x_i ne sont pas autre chose que les composantes contravariantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$, qu'on ne s'y trompe pas malgré la position de l'indice.

**) Sur la possibilité de cette représentation, voir : Weyl : Temps, Espace, Matière, page 37.

CHAPITRE V

MULTIPLICITÉ PONCTUELLE QUELCONQUE
MÉTRIQUE RIEMANNIENNE

Nous avons défini plus haut la notion de *continuum n-dimensionnel* : c'est l'ensemble des groupes de n nombres $(x_1...x_n)$, ces groupes étant appelés des points, quand les x_i varient entre certaines limites. Les nombres x_i sont dits les coordonnées du point $P(x_1...x_n)$. On peut représenter le continuum au moyen d'autres groupes de n nombres; alors à chaque groupe $(x_1...x_n)$ correspondra un nouveau groupe $(\bar{x}_1...\bar{x}_n)$, cela revient à dire que les x_i sont fonction des $\bar{x}_k$:

$$x_i = x_i\ (\bar{x}_1...\bar{x}_n) \qquad (i = 1,\ 2...n) \tag{1}$$

ces fonctions étant supposées continues et dérivables autant de fois que les investigations qui suivent le nécessiteront ; les formules (1) définissent un changement de coordonnées, si le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(x_1, \ldots x_n)}{D(\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n)}$ est différent de zéro ; les équations (1) peuvent alors être résolues par rapport aux $\bar{x}_i$, soient :

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i\ (x_1...x_n) \qquad (i = 1,\ 2,...n) \tag{2}$$

les formules de résolution, les $\bar{x}_i\ (x_1...x_n)$ étant encore des fonctions continues et dérivables.

La notion de multiplicité vectorielle linéaire attachée au continuum suivant les lois définies au chapitre I perd ici son sens. En effet, les différences des anciennes coordonnées $y_i - x_i$ de deux

points $Q(y_i)$ et $P(x_i)$, ne sont plus en général des fonctions linéaires des différences des nouvelles coordonnées $\overline{y}_k - \overline{x}_k$; par conséquent, il est absurde de parler du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ dès l'instant où l'on admet que les fonctions des seconds membres des équations (1) sont quelconques. Toutes les définitions et leurs conséquences : tenseurs, algèbre tensorielle, etc. perdent aussi leur sens. Néanmoins la transformation quelconque (1) entraîne une transformation linéaire de certaines séries de variables attachées au continuum, et avec quelques modifications, il sera possible d'appliquer à notre nouvelle notion, les considérations développées dans le premier chapitre. Il est essentiel pour la clarté de ce qui va suivre de dire en quelques mots quels sont nos desseins. Jusqu'ici nous avons étudié les continua ponctuels au moyen d'équations qui restaient invariantes pour toutes les transformations linéaires des coordonnées ; ce que nous allons tenter c'est une étude de ces continua au moyen de notions et de formules qui resteront *invariantes pour toutes les transformations* (1) *des coordonnées.*

Soient deux points P et Q dont les coordonnées sont respectivement les nombres x_i et $x_i + dx_i$; les formules (2) leur confèrent de nouvelles coordonnées $\overline{x}_i$ et $\overline{x}_i + d\overline{x}_i$ [puisque les fonctions $\overline{x}_i\ (x_1 \ldots x_n)$ sont continues], et l'on a bien évidemment :

$$dx_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_k}\, d\overline{x}_k \qquad (i = 1 \ldots n) \quad (3)$$

$$d\overline{x}_k = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \overline{x}_k}{\partial x_i}\, dx_i \qquad (k = 1 \ldots n) \quad (4)$$

Ces équations sont linéaires en les dx_i comme en les $d\overline{x}_k$. Remarquons que les coefficients $\alpha^i_k = \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x_k}$ et $\beta^i_k = \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_k}$ dépendent du point P puisqu'elles sont des fonctions soit des x, soit des $\overline{x}$; c'est pourquoi, pour l'instant, nous allons porter notre attention sur le point $P(x)$ et sur tous les points $Q(x + dx)$. Il est facile de faire voir tout d'abord que les formules (4) définissent bien la transformation inverse de la transformation linéaire définie par (3), il suffit de multiplier les deux membres de (3) par $\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_i}$ et de sommer par rapport à i, il vient :

$$\sum_i \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i} dx_i = \sum_k \left[\sum_i \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \right] d\bar{x}_k$$

mais

$$\sum_i \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} = \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial \bar{x}_k} = \delta^r_k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

puisque les $\bar{x}_i$ sont des variables indépendantes. L'on a donc bien :

$$d\bar{x}_r = \sum_i \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i} dx_i.$$

Les coefficients des transformations linéaires (3) et (4) sont donc liés par les relations :

$$\sum_i \alpha^r_i \beta^i_k = \delta^r_k$$

et, comme on le voit aussi aisément, par les relations :

$$\sum_i \alpha^i_k \beta^r_i = \delta^r_k$$

qui sont analogues aux relations (15) et (16) du chapitre I.

Au point $P(x)$ on fait donc correspondre l'ensemble des points $Q(x+dx)$ dont nous dirons qu'ils sont *infiniment voisins* de P sans qu'on doive attacher pour l'instant à ce mot aucune signification quant à la distance des points P et Q ; les nombres dx_i sont les coordonnées relatives de Q par rapport à P dans le premier système de coordonnées considéré. Les coordonnées relatives de Q par rapport à P, se transforment linéairement ; elles forment une série de variables $(dx_1 \dots dx_n)$ dont nous dirons qu'elles sont les composantes *contravariantes* du vecteur $\overrightarrow{PQ}$; (nous les disons contravariantes pour que nos dénominations coïncident avec celles que nous avons introduites pour les continua linéaires). L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, Q étant infiniment voisin de P, est une *multiplicité vectorielle linéaire*.

Considérons maintenant une fonction $f(x_1 \dots x_n)$ du point P ; si l'on change de coordonnées par les relations (1), elle devient une fonction $\bar{f}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n)$ et l'on a :

$$f(x) = \bar{f}(\bar{x}).$$

En $Q(x+dx)$, la fonction vaut $f+df$, ou avec les autres coordonnées $\bar{f}+d\bar{f}$;

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \qquad d\bar{f} = \sum_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i$$

mais puisqu'on a :

$$df = d\bar{f}$$

ou :

$$\sum_i f_i dx_i = \sum_i \bar{f}_i d\bar{x}_i, \qquad \left[f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \bar{f}_i = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i}\right]$$

on en déduit que les grandeurs $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, et les grandeurs dx_i, forment *deux séries de variables contragrédientes*.

Les f_i sont donc des variables *covariantes*, puisque nous disons que les dx_i sont des variables contravariantes.

L'on a d'ailleurs :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k \alpha_i^k \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_k}$$

et :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} = \sum_k \beta_i^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Plus généralement, nous dirons qu'un ensemble de nombres $(\xi^1 \ldots \xi^n)$ attachés au point $P(x)$, donc fonctions des x_i représente les composantes d'un vecteur contravariant, si, par un changement de coordonnées (1) et (2), ils se transforment en des nombres $(\bar{\xi}^1 \ldots \bar{\xi}^n)$ suivant les formules :

$$\xi^i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \bar{\xi}^k$$

ou

$$\bar{\xi}^k = \sum_i \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \xi^i;$$

et les nombres $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ qui se transforment en les nombres $(\bar{\eta}_1 \ldots \bar{\eta}_n)$ suivant les formules :

$$\eta_i = \sum_k \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \bar{\eta}_k$$

$$\bar{\eta}_k = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \eta_i$$

sont dites les *composantes d'un vecteur covariant* attaché en P. Dans les transformations précédentes, il est bien entendu que les dérivées partielles sont prises avec les valeurs qu'elles ont en P.

En fait et pour résumer, les variables *contravariantes* se transforment comme les *différentielles* des coordonnées et les variables *covariantes* se transforment comme les *dérivées* par rapport aux coordonnées d'une *fonction* du point $P(x)$.

Il est dès lors possible dans un continuum quelconque de développer une algèbre tensorielle, mais il faut bien insister sur ce point essentiel, c'est que cette algèbre est toujours relative à un point bien déterminé du continuum puisque les coefficients α_i^k et β_i^k des équations (1) et (2) dont les relations forment la clef de toutes nos déductions, dépendent des variables x_i (ou $\bar{x}_i$). De même qu'il est impossible de parler de deux vecteurs identiques* attachés à deux points $P(x)$ et $S(y)$, il est absurde de parler de deux tenseurs identiques du second ordre covariants, relatifs à ces deux points P et S.

Nous n'avions pu achever l'algèbre tensorielle dans une multiplicité linéaire qu'en introduisant une métrique. Pour achever celle dont nous venons d'esquisser les prémisses, il suffit de définir la longueur d'un vecteur de la multiplicité linéaire vectorielle que nous avons formée avec les vecteurs qui joignent un point P aux points infiniment voisins. Nous n'insisterons pas sur les raisons qui ont poussé Riemann à définir la distance ds qui doit être un invariant des deux points $P(x)$ et $Q(x + dx)$ par la relation :

$$ds^2 = \sum_{i,\,k}^{1,\dots n} g_{ik} dx_i dx_k \qquad \text{(A)}$$

où les g_{ik} sont des fonctions de P, telles que le déterminant $|g_{ik}| = g$, soit différent de zéro, sauf peut-être en certains points qui sont précisément dits points singuliers du continuum et que nous exclurons toujours du champ de nos investigations.

*) En effet, dire par exemple que deux vecteurs en P et S sont identiques quand ils ont les mêmes composantes dans un certain système, ne serait pas une définition invariante puisque dans un autre système de coordonnées, ces composantes ne seraient plus les mêmes, précisément à cause de la variabilité des α_i^k et des β_i^k avec le lieu.

En définitive, *le carré de la longueur du vecteur* $\overrightarrow{PQ}$ $[P(x)$ et $Q(x+dx)]$ dont les composantes sont les différentielles dx_i est *une forme quadratique de ces différentielles ;* les coefficients de cette forme sont des fonctions du point P, c'est-à-dire des variables $x_1 \ldots x_n$.

Que devient cette définition lorsqu'on change de coordonnées ? Puisque les différentielles dx_i sont des fonctions linéaires des $d\bar{x}_k$, la forme quadratique (A) des dx_i se transforme en une forme quadratique des $d\bar{x}_i$, appelons $\bar{g}_{ik}$ $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$ les nouveaux coefficients ; puisque l'on a :

$$\sum g_{ik} dx_i dx_k = \sum \bar{g}_{ik} d\bar{x}_i d\bar{x}_k$$

on tire, d'après (3) :

$$\sum_{\substack{i,k \\ r,t}} g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_t} d\bar{x}_r d\bar{x}_t = \sum_{i.k} \bar{g}_{ik} d\bar{x}_i d\bar{x}_k.$$

Ces deux formes quadratiques étant identiques, on a, en identifiant les coefficients de $d\bar{x}_r d\bar{x}_t$:

$$\sum_{ik} g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_t} = \bar{g}_{rt}.$$

En chaque point $P(x)$, les g_{ik} se transforment par *covariance.* En d'autres termes, la métrique du continuum est déterminée en chaque point par un *tenseur covariant du second ordre* dont les composantes sont des fonctions de ce point.

L'angle θ de deux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ où

$$P(x_1, \ldots x_n), \quad Q(x_1 + dx_1, \ldots x_n + dx_n), \quad \text{et} \quad R(x_1 + \delta x_1, \ldots x_n + \delta x_n)$$

sont trois points infiniment voisins, est par définition — et par analogie — donné par la relation :

$$\cos \theta = \frac{g_{ik} dx_i \delta x_k}{\sqrt{g_{ik} dx_i dx_k \cdot g_{ik} \delta x_i \delta x_k}}.$$

A l'exemple de *M. Weyl,* nous dirons que le vecteur contravariant $(\xi^1 \ldots \xi^n)$ attaché en $P(x)$ détermine un *segment* dont la mesure est donnée par le nombre

$$m = g_{ik} \xi^i \xi^k.$$

Si l'on pose $\xi_i = \sum_k g_{ik}\xi^k$, l'on voit sans difficulté que ces nombres ξ_i se transforment par covariance ; l'on dira que les ξ_i sont les composantes *covariantes* du vecteur dont les ξ^i sont les composantes contravariantes.

L'algèbre tensorielle est ainsi parachevée et il est possible de répéter ici tous les résultats des chapitres I, II, III. Quant à l'analyse tensorielle, nous ne pouvons pas la calquer sans autre sur le chapitre IV puisque nous ne savons pas reconnaître l'égalité de deux vecteurs attachés en deux points différents ; or cette connaissance est à la base même, avons-nous vu, des concepts de l'analyse tensorielle.

La définition très abstraite du continuum que nous avons donnée plus haut sera rendue plus claire si nous rappelons les résultats essentiels de la *théorie des surfaces*.

Imaginons dans l'espace linéaire à trois dimensions, un système de coordonnées rectangulaires par rapport auquel tout point de l'espace est caractérisé par les trois nombres x, y, z. Deux points infiniment voisins (x,y,z) $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ déterminent un vecteur dont la longueur ds est donnée par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{5}$$

Une surface est le lieu des points (x, y, z) qui dépendent de deux paramètres par les relations :

$$x = f(u,v)$$
$$y = g(u,v)$$
$$z = h(u,v)$$

Les fonctions f,g,h étant telles que les trois déterminants fonctionnels $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ ne soient pas nuls à la fois. A chaque couple de valeurs u et v comprises dans certains intervalles correspond un point de l'espace, le lieu de ces points est une surface. Donc une surface est un continuum à deux dimensions.

On sait que le plan

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big[X-f(u,v)\Big]+\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big[Y-g(u,v)\Big]+\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big[Z-h(u,v)\Big]=0$$

est le lieu des droites qui passent par le point (u,v) et par tout point infiniment voisin $(u+du,\ v+dv)$. Dans ce plan, il est possible d'imaginer une multiplicité vectorielle linéaire à deux dimensions, les vecteurs y ont des composantes ξ^1 et ξ^2 qui se transforment comme les du et les dv lorsqu'on change de coordonnées u et v par des relations quelconques :

$$u = u(\bar{u},\bar{v})$$

$$v = v(\bar{u},\bar{v}).$$

Les vecteurs de base du système de coordonnées dans le plan sont des vecteurs portés par les 2 droites qui supportent l'une le vecteur $\overrightarrow{PA}$, où A est le point $(u+du,v)$ et l'autre $\overrightarrow{PB}$, où B est le point $(u,v+dv)$.

La métrique de la surface est donnée par la forme (5) où l'on remplace dx, dy, dz par leurs valeurs :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \qquad \text{etc.} \tag{6}$$

Cette forme devient :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2\,,$$

où

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Si l'on pose $u = x_1$, $v = x_2$, on a $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$. Le déterminant $|g_{ik}| = EG - F^2$, est différent de zéro, car, en vertu de l'*identité de Lagrange*, il est égal à la somme des carrés des trois déterminants fonctionnels auxquels il a été fait allusion plus haut ; puisque ces trois déterminants ne sont pas nuls à la fois, $|g_{ik}| \neq 0$.

Soient trois points dans l'espace :

$$P(x,y,z),\ \ Q(x+dx,\ y+dy, z+dz),\ \ R(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z),$$

l'angle α des deux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ est donné par la relation :

$$\cos \alpha = \frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{\sqrt{\sum dx^2 \cdot \sum \delta x^2}}. \tag{7}$$

En supposant que les trois points soient sur la surface, Q étant le point $(u+du, v+dv)$, R le point $(u+\delta u, v+\delta v)$, l'angle α des deux vecteurs infiniment petits $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ situés sur la surface, ou si l'on veut encore, l'angle des deux droites qui, dans le plan tangent en P à la surface, passent par P,Q et P,R est donné par l'équation :

$$\cos \alpha = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{ds.\delta s}$$

comme le montre la formule (7) où l'on remplace les dx par leur valeur (6), et les δx par $\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v$.

L'aire du triangle infinitésimal PQR tracé sur la surface est, aux infiniment petits du 4e ordre près :

$$d\sigma = \frac{1}{2} ds\delta s \sin \alpha.$$

Cette aire s'exprime au moyen des g_{ik}, c'est-à-dire au moyen des E,F,G ; on trouve en effet :

$$d\sigma = \frac{1}{2} (du\delta v - dv\delta u) \sqrt{EG - F^2}$$

Les formules obtenues restent les mêmes quelle que soit la représentation paramétrique utilisée.

Nous n'insisterons pas davantage sur la métrique des surfaces, le cas est bien classique. Néanmoins rappelons rapidement certaines définitions relatives à la géométrie globale — et non plus différentielle — de la surface. Une *courbe C* tracée sur la surface, est le lieu des points $P(u,v)$ dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre :

$$u = \varphi(t)$$
$$v = \psi(t)$$

A la valeur t du paramètre correspond un point P de la courbe, à la valeur $t+dt$, si φ et ψ sont continus, correspond le point $Q(u+du, v+dv)$, avec :

$$du = \varphi'(t)dt$$

$$dv = \psi'(t)dt\,;$$

la longueur ds du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est donnée par :

$$ds^2 = H(t)\,dt^2$$

où

$$H(t) = E[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'^2(t) + 2F(\varphi,\psi)\varphi'\psi' + G(\varphi,\psi)\psi'^2.$$

Soient alors deux points $A(t_0)$ et $B\,(t_1)$ de la courbe C. Par définition, la longueur de l'arc AB de C est :

$$l = \int_A^B ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{H(t)}\,dt.$$

De même qu'une surface de Gauss est définie à l'intérieur d'une multiplicité ponctuelle linéaire à 3 dimensions par des équations paramétriques en u, v, de même on peut définir à l'intérieur d'une multiplicité ponctuelle linéaire M_k à k dimensions un continuum C_n à n dimensions ($n \leqslant k$) par des équations paramétriques. Soient par exemple $(y_1 \ldots y_k)$ les coordonnées d'un point M_k et supposons que les coefficients de la forme métrique fondamentale soient les nombres (constants) G_{rs} ; la distance ds de deux points infiniment voisins (y_i) et $(y_i + dy_i)$ est donc donnée par :

$$ds^2 = \sum_{rs}^{1\ldots k} G_{rs}dy_r dy_s.$$

Supposons que les y_i soient fonctions de n paramètres $(x_1 \ldots x_n)$; à chaque groupe de valeurs $(x_1 \ldots x_n)$ correspond un point $P(y_1 \ldots y_k)$ de la multiplicité M_k. Le lieu de ces points est un continuum à n dimensions C_n.

Soient donc

$$y_i = y_i(x_1 \ldots x_n) \qquad (i = 1 \ldots k)$$

les k équations de définition de C_n. Les fonctions y_i sont telles que les déterminants fonctionnels $\dfrac{D(y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_n})}{D(x_1 \ldots x_n)}$ ne sont pas tous nuls.

Le ds^2 qui donne la métrique de C_n est :

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n} g_{il}dx_i dx_l$$

avec

$$g_{il} = \sum_{r,s}^{1\dots k} G_{rs} \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_l}.$$

Réciproquement, tout continu C_n dont la métrique est donnée par la forme :

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\dots n} g_{il} dx_i dx_l$$

peut être considéré comme plongé dans une multiplicité ponctuelle linéaire M_k ($k \geqslant n$) dont le nombre k des dimensions est à déterminer et dans laquelle par conséquent la métrique est donnée par une forme à coefficients constants :

$$ds^2 = \sum_{rs}^{1\dots k} G_{rs} dy_r dy_s.$$

En effet, pour cela, il faut déterminer k fonctions $y_1 \dots y_k$ des variables $x_1 \dots x_n$, ces fonctions satisfaisant aux équations aux dérivées partielles :

$$\sum_{r,s}^{1\dots k} G_{rs} \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_l} = g_{il} \qquad (i, l = 1 \dots n).$$

Ces équations au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$ doivent déterminer k fonctions y_i. Cette détermination est effectivement possible, la démonstration nous entraînerait trop loin. On conçoit dès lors qu'il soit possible de parler d'une multiplicité vectorielle linéaire M_n tangente à la multiplicité C_n en un point $P(x_1 \dots x_n)$, c'est le lieu des droites*) qui joignent P aux points infiniment voisins $Q(x_i + dx_i)$, cette M_n est définie au moyen d'équations linéaires en les coordonnées courantes $Y_1 \dots Y_k$ relatives au système employé pour les points de la M_k, ces équations linéaires sont au nombre de $k - n$.

Une courbe C, tracée dans le continuum C_n, est le lieu des points dont les coordonnées x_i sont fonctions d'un paramètre :

*) Nous supposons ici connus les rudiments de la géométrie analytique d'un espace à k dimensions. Dans un tel espace la droite qui joint les points

$$P(y_1^1, \dots, y_k^1) \qquad \text{et} \qquad Q(y_1^2, \dots, y_k^2)$$

a pour équations paramétriques :

$$Y_i = y_i^1 + t(y_i^2 - y_i^1) \; (i = 1, k),$$

c'est un continuum à une dimension.

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

La longueur de l'arc de courbe compris entre deux points $A[x_i(t_0)]$ et $B[x_i(t_1)]$ est donnée par l'intégrale :

$$l = \int_A^B ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{H(t)}dt$$

où :

$$H(t) = \sum_{i,l}^{1\ldots n} g_{il}[x_k(t)]x'_i(t)x'_l(t).$$

Equivalence de deux formes quadratiques de différentielles.

Etant donnés deux continua C_n et $\bar{C}_n$ à n dimensions chacun, rapportés le premier à un système $(x_1 \ldots x_n)$ le deuxième à un système $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$, telles que leurs métriques soient définies respectivement par les formes :

$$g_{ik}dx_i dx_k \quad \text{et} \quad \bar{g}_{ik}d\bar{x}_i d\bar{x}_k,$$

l'on dit que ces deux continua sont applicables l'un sur l'autre s'il est possible de trouver n fonctions $x_i = x_i(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$, telles que la première forme quadratique de différentielles se transforme identiquement en la seconde, lorsqu'on effectue précisément la transformation définie par ces fonctions. Les deux formes différentielles sont dites, dans ce cas, *équivalentes*.

Pour que les deux formes soient équivalentes, il faut que les fonctions $x_1(\bar{x})$ satisfassent aux $\frac{n(n+1)}{2}$ équations aux dérivées partielles :

$$\bar{g}_{ik} = g_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k}. \qquad (8)$$

Puisqu'il n'y a que n fonctions inconnues, il faut que les $\bar{g}_{ik}$ et les g_{rs} soient liés par certaines relations, indépendantes des dérivées partielles $\frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i}$.

Nous n'allons pas étudier le problème de l'équivalence pour lui-même, nous allons simplement en amorcer la solution ; ce début de solution permet en effet de donner une excellente et rapide démonstration de la covariance ou de la contravariance

de certaines fonctions qui s'introduisent très naturellement dans le cours ultérieur de nos recherches.

Calculons les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial\bar{x}_r \partial\bar{x}_s}$; *Christoffel* a proposé une méthode dont voici les détails : dérivons les deux membres des équations (8) par rapport à $\bar{x}_l$, en ayant égard au fait que

$$\frac{\partial f(x_1 \ldots x_n)}{\partial\bar{x}_l} = \sum_r \frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_l} = \frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_l},$$

en supprimant le signe $\sum$. Il vient :

$$\frac{\partial\bar{g}_{ik}}{\partial\bar{x}_l} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t}\frac{\partial x_t}{\partial\bar{x}_l}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_i}\frac{\partial x_s}{\partial\bar{x}_k} + g_{rs}\left(\frac{\partial^2 x_r}{\partial\bar{x}_i\partial\bar{x}_l}\frac{\partial x}{\partial\bar{x}_k} + \frac{\partial^2 x_s}{\partial\bar{x}_k\partial\bar{x}_l}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_i}\right).$$

Calculons de même $\dfrac{\partial\bar{g}_{il}}{\partial\bar{x}_k}$ et $-\dfrac{\partial\bar{g}_{kl}}{\partial\bar{x}_i}$; en changeant convenablement les indices muets pour pouvoir grouper ensuite convenablement les termes et en remarquant que $g_{rs}a^{rs} = g_{rs}a^{sr}$, quel que soit le tenseur a^{ik}, on trouve :

$$\frac{\partial\bar{g}_{il}}{\partial\bar{x}_k} = \frac{\partial g_{rt}}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial\bar{x}_k}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_i}\frac{\partial x_t}{\partial\bar{x}_l} + g_{rs}\left(\frac{\partial^2 x_s}{\partial\bar{x}_i\partial\bar{x}_k}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_l} + \frac{\partial^2 x_r}{\partial\bar{x}_k\partial\bar{x}_l}\frac{\partial x_s}{\partial\bar{x}_i}\right)$$

$$-\frac{\partial\bar{g}_{kl}}{\partial\bar{x}_i} = -\frac{\partial g_{ts}}{\partial x^r}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_i}\frac{\partial x_s}{\partial\bar{x}_k}\frac{\partial x_t}{\partial\bar{x}_l} - g_{rs}\left(\frac{\partial^2 x_s}{\partial\bar{x}_k\partial\bar{x}_i}\frac{\partial x_r}{\partial\bar{x}_l} + \frac{\partial^2 x_r}{\partial\bar{x}_l\partial\bar{x}_i}\frac{\partial x_s}{\partial\bar{x}_k}\right).$$

Additionnons ces trois équations membre à membre et posons pour abréger :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{g}_{ik}}{\partial\bar{x}_l} + \frac{\partial\bar{g}_{il}}{\partial\bar{x}_k} - \frac{\partial\bar{g}_{kl}}{\partial\bar{x}_i}\right) = \bar{\Gamma}_{kl,i} = \begin{bmatrix} \overline{k\,l} \\ i \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial x_s} - \frac{\partial g_{ts}}{\partial x_r}\right) = \Gamma_{ts,r} = \begin{bmatrix} t\,s \\ r \end{bmatrix}.$$

Ces fonctions se comportent comme les composantes de tenseurs du 3[e] ordre, covariantes pour les trois indices, relativement à toute transformation linéaire des coordonnées, ce ne sont donc pas des tenseurs au sens que nous donnons à ce mot, dans la géométrie riemannienne. Remarquons que :

$$\Gamma_{ts,r} = \Gamma_{st,r} .$$

Nos calculs donnent alors :

$$2\bar{\Gamma}_{kl,i} = 2\,\Gamma_{st,r}\,\frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k}\,\frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l}\,\frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i} + 2\,g_{rs}\,\frac{\partial^2 x_s}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l}\,\frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i}\,, \qquad (9)$$

divisons par 2 et multiplions les deux membres par $\bar{g}^{mi}\dfrac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m}$, puis sommons par rapport à m. Remarquons alors que :

$$\bar{g}^{mi}\,\frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m}\,\frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i} = g^{ur}$$

et que

$$g^{ur} g_{rs} = \delta^u_s,$$

il vient alors :

$$\bar{g}^{mi}\,\bar{\Gamma}_{kl,\,i}\,\frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m} = \delta^u_s\,\frac{\partial^2 x_s}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} + g^{ur}\Gamma_{st,\,r}\,\frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k}\,\frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l}\,.$$

Posons maintenant :

$$g^{\gamma\delta}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta} = \begin{Bmatrix} \alpha\ \beta \\ \delta \end{Bmatrix}$$

les $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta}$ sont covariants en α et β et contravariants en δ pour des transformations linéaires de coordonnées. Comme d'autre part :

$$\delta^u_s\,\frac{\partial^2 x_s}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} = \frac{\partial^2 x_u}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l},$$

nos équations sont résolues par rapport aux dérivées secondes et l'on a :

$$\frac{\partial^2 x_u}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} + \Gamma_{st}{}^{u}\,\frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k}\,\frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l} = \bar{\Gamma}_{kl}{}^{m}\,\frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m} \qquad (10)$$

et de même

$$\frac{\partial^2 x_u}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_i} + \Gamma_{st}{}^{u}\,\frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k}\,\frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i} = \bar{\Gamma}_{ki}{}^{m}\,\frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m}\,. \qquad (11)$$

Nous allons écrire maintenant que ce système d'équations aux dérivées partielles du second ordre est *intégrable*, il faut exprimer pour cela tout d'abord, que l'égalité :

$$\frac{\partial^3 x_u}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l \partial \bar{x}_i} = \frac{\partial^3 x_u}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_l} \tag{12}$$

est une identité. Dérivons donc les deux membres de (10) par rapport à $\bar{x}_i$, ceux de (11) par rapport à $\bar{x}_l$ et soustrayons membre à membre les équations obtenues ; en tenant compte de (12), il vient :

$$\frac{\partial \Gamma_{st}^u}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \Gamma_{st}^u}{\partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_l} + \Gamma_{st}^u \frac{\partial^2 x_s}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l}$$
$$- \Gamma_{st}^u \frac{\partial^2 x_s}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i}$$
$$= \frac{\partial \bar{\Gamma}_{kl}^m}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ki}^m}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m} + \bar{\Gamma}_{kl}^m \frac{\partial^2 x_u}{\partial \bar{x}_m \partial \bar{x}_i} - \bar{\Gamma}_{ki}^m \frac{\partial^2 x_u}{\partial \bar{x}_m \partial \bar{x}_l}.$$

Changeons les indices muets dans la 1[re] ligne et remplaçons les dérivées secondes par leurs valeurs (10) et (11). Il vient :

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{sr}^u}{\partial x_t} - \frac{\partial \Gamma_{st}^u}{\partial x_r}\right) \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i} - \Gamma_{st}^u \Gamma_{pq}^s \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_u} \frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_i}$$
$$+ \Gamma_{st}^u \Gamma_{pq}^s \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_l} + \Gamma_{st}^u \bar{\Gamma}_{ki}^m \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l} - \Gamma_{st}^u \bar{\Gamma}_{kl}^m \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_m} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i}$$
$$= \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{kl}^m}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ki}^m}{\partial \bar{x}_l}\right) \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m}$$
$$+ \bar{\Gamma}_{kl}^m \bar{\Gamma}_{mi}^v \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_v} - \bar{\Gamma}_{ki}^m \bar{\Gamma}_{ml}^v \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_v} - \bar{\Gamma}_{kl}^m \Gamma_{st}^u \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_m} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i} + \bar{\Gamma}_{ki}^m \Gamma_{st}^u \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_m} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_l}.$$

Les deux derniers termes de chacun des membres s'entre-détruisent lorsqu'on les fait passer tous dans un même membre. En changeant les indices muets et en mettant en facteur les dérivées $\frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_\mu}$, il vient :

$$\left[\frac{\partial \Gamma_{sr}^u}{\partial x_t} - \frac{\partial \Gamma_{st}^u}{\partial x_r} + \Gamma_{sr}^j \Gamma_{jt}^u - \Gamma_{st}^j \Gamma_{jr}^u\right] \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i}$$
$$= \left[\frac{\partial \bar{\Gamma}_{kl}^m}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ki}^m}{\partial \bar{x}_l} + \bar{\Gamma}_{kl}^s \bar{\Gamma}_{si}^m - \bar{\Gamma}_{ki}^s \bar{\Gamma}_{sl}^m\right] \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m}.$$

Dans chaque crochet, on trouve des fonctions qui se forment à partir des g_{ik} ou des $\bar{g}_{rs}$ de la même manière. Posons pour abréger :

$$R_s{}^u{}_{,rt} = \frac{\partial \Gamma_{sr}{}^u}{\partial x_t} - \frac{\partial \Gamma_{st}{}^u}{\partial x_r} + \Gamma_{sr}{}^j \Gamma_{jt}{}^u - \Gamma_{st}{}^j \Gamma_{jr}{}^u ; \qquad (13)$$

l'équation qu'on vient d'obtenir s'écrit alors :

$$R_s{}^u{}_{,rt} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i} = \bar{R}_k{}^m{}_{,li} \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m}. \qquad (14)$$

Enfin en posant :

$$g_{uv} R_s{}^u{}_{,rt} = R_{sv,rt}$$

et en remarquant que

$$g_{uv} \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_m} \frac{\partial x_v}{\partial \bar{x}_j} = \bar{g}_{uj},$$

il vient, après multiplication des deux membres de (14) par $g_{uv} \dfrac{\partial x_v}{\partial \bar{x}_j}$ et sommation par rapport à u et v :

$$R_{sv,rt} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_v}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_i} = \bar{R}_{jk,li}. \qquad (15)$$

Les fonctions $R_{sv,rt}$ (et $\bar{R}_{jk,li}$) sont donc les composantes COVARIANTES d'un champ de tenseur du 4e ordre, qu'on appelle le *tenseur de Riemann*. Les fonctions $R_s{}^u{}_{,rt}$ (et $R_k{}^m{}_{,li}$) sont des composantes du même tenseur, elles sont trois fois covariantes [en s,r,t (ou en k,l,i)] et une fois contravariantes [en u, (ou en v)].

C'est là le seul résultat de la théorie de l'équivalence de deux formes, qui nous sera utile.

Propriétés des symboles de CHRISTOFFEL *et du tenseur de* RIEMANN

D'après leur définition, les symboles de *Christoffel* de première espèce $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$ ($= \Gamma_{ik,l}$) sont symétriques en i et k. Ce ne sont pas des tenseurs covariants car les formules de transformation (9) montrent que les fonctions $\Gamma_{ik,l}$ se transforment par covariance, seulement si $\dfrac{\partial^2 x_s}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} = 0$, c'est-à-dire seulement si les formules de transformation sont linéaires.

$\left\{ {ik \atop r} \right\} = g^{rl} \left[{ik \atop l} \right] \left(= \Gamma_{ik}^{r} \right)$ est symétrique en i et k; ces fonctions sont covariantes en i et k et contravariantes en r pour des transformations linéaires de coordonnées. Il y a $\frac{n(^2n+1)}{2}$ symboles de Christoffel de 1re espèce et autant de seconde espèce ; en effet les nombres de combinaisons avec répétitions de n lettres deux à deux est $\frac{n(n+1)}{2}$, c'est le nombre des groupes ik ; or avec chacun de ces groupes on peut former n groupes i,k,l, ce qui en donne bien en tout $\frac{n^2(n+1)}{2}$.

Nous pourrions écrire suivant la convention sur les expressions symétriques par rapport à deux indices, Γ_{ik}^{r} au lieu de $\Gamma_{ik}{}^{r}$; mais puisque ce livre est une *introduction* au calcul tensoriel, nous n'utiliserons pas cette convention à propos des symboles de Christoffel, dans lesquels nous aurons très souvent à monter ou à descendre le 3e indice.

Nous avons reconnu que les symboles de Riemann sont bien les composantes d'un tenseur du 4e ordre. Voyons les propriétés des composantes 4 fois covariantes : $R_{sv,rt}$ (qu'on écrit parfois (sv,rt)). Puisque :

$$R_{sv,rt} = g_{uv} R_{s}{}^{u}{}_{,rt}$$

on se rend aisément compte par un calcul simple en se référant à l'expression de $R_{s}{}^{u}{}_{,rt}$ (qu'on écrit aussi $\{su,rt\}$) que :

$$R_{sv,rt} = \frac{\partial \Gamma_{sr,v}}{\partial x_t} - \frac{\partial \Gamma_{st,v}}{\partial x_r} + \Gamma_{st,i} \Gamma_{vr}{}^{i} - \Gamma_{sr,i} \Gamma_{vt}{}^{i}$$

ou aussi

$$R_{sv,rt} = \frac{\partial \Gamma_{sr,v}}{\partial x_t} - \frac{\partial \Gamma_{st,v}}{\partial x_r} + \Gamma_{st}{}^{j} \Gamma_{vr,j} - \Gamma_{sr}{}^{j} \Gamma_{vt,j}.$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{\partial \Gamma_{sr,v}}{\partial x_t} - \frac{\partial \Gamma_{st,v}}{\partial x_r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{rv}}{\partial x_s \partial x_t} + \frac{\partial^2 g_{st}}{\partial x_v \partial x_r} - \frac{\partial^2 g_{sr}}{\partial x_v \partial x_t} - \frac{\partial^2 g_{tv}}{\partial x_s \partial x_r} \right).$$

Tous ces développements montrent que

$$R_{sv,rt} = - R_{vs,rt},$$
$$R_{sv,rt} = - R_{sv,tr},$$
$$R_{sv,rt} = + R_{rt,vs}.$$

On peut grouper les indices deux par deux, les composantes du tenseur de Riemann sont symétriques gauches par rapport aux deux indices de chaque groupe, mais elles sont symétriques par rapport à chaque groupe.

On voit encore par un calcul simple que les symboles $R_{sv,rt}$ jouissent de la *propriété cyclique suivante :*

$$R_{sv,rt} + R_{sr,tv} + R_{st,vr} = 0.$$

Le premier indice restant fixe, on permute circulairement les trois autres, la somme des trois composantes ainsi formée est nulle. En vertu des propriétés de symétrie, on peut dire que cette propriété cyclique est vraie quel que soit le rang de l'indice qui reste fixe dans les permutations.

Le nombre des composantes distinctes et non nulles du tenseur de Riemann est un peu plus difficile à obtenir que le nombre des symboles de Christoffel. Puisque

$$R_{ik,lm} = -R_{ki,lm}$$

on a :

$$R_{ii,lm} = 0.$$

Il y a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ assemblages de deux indices qu'on peut combiner entre eux pour former des composantes non nulles ; soit N le nombre $\frac{n(n-1)}{2}$. Puisque

$$R_{ik,lm} = R_{lm,ik}.$$

les groupes que l'on doit prendre dans ces N assemblages sont en nombre égal à celui des combinaisons avec répétition de N objets pris deux à deux, c'est-à-dire :

$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]$$

$$= \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} = M.$$

Cependant les composantes ainsi obtenues ne sont pas encore distinctes, il existe entre elles les relations cycliques mentionnées ci-dessus. Parmi ces relations, celles qui proviennent de l'une d'entre elles par la même permutation des indices, ne sont pas distinctes

puisque, par les relations de symétrie, elles se réduisent toutes à l'une d'elles. D'autre part, celles qui sont relatives à des composantes dont deux indices sont identiques, se réduisent à l'une des conditions de symétrie gauche. Donc toutes les combinaisons sans répétition des n indices pris quatre à quatre, donneront une relation cyclique ; et il n'y a que celles-là qui soient distinctes ; le nombre de ces relations est donc de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$; les M composantes que nous avons déterminées sont liées par ces relations ; il y a donc :

$$\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

composantes distinctes du tenseur covariant de Riemann.

Contractons le tenseur de Riemann ; pour cela égalons un indice inférieur des composantes $R_s{}^u{}_{,rt}$ à l'indice supérieur et sommons par rapport à cet indice commun. Si l'on fait $s = u$, on a, à cause de la symétrie gauche $R_u{}^u{}_{,st} = 0$. Posons alors $u = r$ (le cas $u = t$, s'y ramène immédiatement) et écrivons :

$$R_s{}^u{}_{,ut} = R_{st}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut (p. 41)

$$R_{st} = R_{ts}.$$

C'est ce tenseur du second ordre qui joue un rôle essentiel dans la théorie einsteinienne de la gravitation. Formons

$$g^{su} R_{st} = g^{su} R_{ts} = R_t^u$$

et contractons de nouveau, en posant

$$R_t^t = R.$$

R est un invariant absolu ; c'est-à-dire que le champ scalaire défini par la fonction R ne change pas de valeur ni de forme, quand on soumet l'expression analytique qui la représente à une transformation quelconque de coordonnées.

Donnons l'expression de R_{st} ; on a d'après (13) :

$$R_{st} = \frac{\partial \Gamma_{su}{}^u}{\partial x_t} - \frac{\partial \Gamma_{st}{}^u}{\partial x_u} + \Gamma_{su}{}^j \Gamma_{jt}{}^u - \Gamma_{st}{}^j \Gamma_{ju}{}^u.$$

Le tenseur du second ordre R_{st} est dit le *tenseur de courbure*.

Remarque sur les formes différentielles à coefficients constants.

Pour une telle forme les $R_{ik,lm}$ sont tous nuls. Or, si l'on change de coordonnées, les coefficients de la forme métrique ne restent pas forcément constants, mais les nouveaux $\overline{R}_{ik,lm}$ qui s'expriment linéairement en fonction des anciens en vertu de leur covariance, sont encore nuls. La théorie de l'équivalence de deux formes quadratiques développée plus amplement que nous ne l'avons fait, démontre la réciproque de cette proposition.

Application aux surfaces ordinaires. — Soit une surface de Gauss dont le ds^2 est :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

On a :

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G\,; \quad |g_{ik}| = g = EG - F^2$$

$$g^{11} = \frac{G}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{g}, \quad g^{22} = \frac{E}{g}.$$

Les $\dfrac{n^2(n+1)}{2} = 6$ symboles de Christoffel de 1re espèce sont : *

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \begin{bmatrix} 22 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Ceux de seconde espèce au nombre de 6, sont :

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{-2F\dfrac{\partial F}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} + E\dfrac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

*) Nous suivons ici presque textuellement les calculs de Bianchi : Vorlesungen über Differentialgeometrie, Teubner, Leipzig, 2te Aufl. 1910, p. 66.

Puisque $\frac{n^2(n^2-1)}{12} = 1$, il n'y a lieu de calculer qu'un seul symbole de Riemann de 1[re] espèce : $R_{12,12}$. Calculons-le dans l'hypothèse où $F = 0$

$$R_{12,12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{1}{4EG}\left[G\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 + E\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - G\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + E\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}\right].$$

Or, dans le cas où $n = 2$, on a :

$$\overline{R}_{12,12} = R_{12,12}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_1}\frac{\partial x_2}{\partial \overline{x}_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_2}\frac{\partial x_2}{\partial \overline{x}_1}\right)^2. \tag{16}$$

C'est en effet à quoi se réduisent les équations (15).

Or le déterminant fonctionnel $J = \frac{D(x_1,x_2)}{D(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}$ est égal, d'après la théorie élémentaire des substitutions linéaires à $\sqrt{\frac{|\overline{g}_{ik}|}{|g_{ik}|}}$; l'équation (16) s'écrit donc :

$$\frac{\overline{R}_{12,12}}{|\overline{g}_{ik}|} = \frac{R_{12,12}}{|g_{ik}|}.$$

La fonction $\frac{R_{12,12}}{g}$ est donc un invariant dans le cas des surfaces ordinaires, on l'appelle la *courbure totale* de la surface au point considéré. Calculons les invariants pour le cas où $E = R^2$ et $G = R^2 \sin^2 u$; ces deux fonctions sont les coefficients de la forme métrique de la sphère de rayon R, quand on prend la *colatitude* u et la *longitude* v comme coordonnées. L'expression de $R_{12,12}$ devient :

$$R_{12,12} = R^2\left[-\cos 2u + \frac{1}{4\sin^2 u}\cdot \sin^2 2u\right] = R^2 \sin^2 u$$

or $g = R^4 \sin^2 u$; par suite :

$$\frac{R_{12,12}}{g} = \frac{1}{R^2}.$$

Plus généralement, si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface au point P, la courbure totale de la surface en P est $\frac{1}{R_1R_2}$ et l'on a bien :

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{R_{12,12}}{g}.$$

CHAPITRE VI

LE DÉPLACEMENT PARALLÈLE D'APRÈS M. LEVI-CIVITA

On doit à M. Levi-Civita la définition et l'application d'une très importante notion pour l'analyse d'un continuum riemannien C_n : celle du *parallélisme* de deux vecteurs. Dans un très beau mémoire paru dans les « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » (1917), le savant géomètre italien définit ce qu'il faut entendre par les expressions : *vecteurs parallèles* et *déplacement d'un vecteur parallèlement à lui-même*. A vrai dire, en analysant dans le détail le mémoire que M. Levi-Civita a publié en collaboration avec M. Ricci, en 1901 dans les « Mathematische Annalen » (Bd. 54), je crois qu'il ne serait pas difficile d'y dégager déjà la notion de parallélisme. M. Hadamard a remarqué dans les conférences d'analyse de mémoires mathématiques, qu'il préside au Collège de France, que Darboux, grâce à ses travaux sur la courbure géodésique des surfaces et à l'aide de la méthode du trièdre mobile, utilisait déjà cette notion pour les surfaces ordinaires sans d'ailleurs qu'il en eût dégagé toute l'importance. Mais la caractéristique du mémoire de 1917 c'est que l'idée mathématique est dégagée avec beaucoup de netteté et que l'importance du grand nombre des résultats ne le cède en rien à l'élégance des méthodes analytiques employées. M. H. Weyl dans ses leçons sur la théorie de la relativité, a retrouvé les résultats essentiels de M. Levi-Civita par des considérations purement intrinsèques et en particularisant la définition très générale qu'il a donnée de la métrique *.

*) Voir Weyl. T., E., M., ch. II. La connexion affine.

Nous développerons ici la méthode de M. Levi-Civita. A un point $P(x_1...x_n)$, d'un continuum riemannien C_n nous savons qu'on peut rattacher une multiplicité linéaire vectorielle M_n à n dimensions, chaque vecteur étant défini dans M_n par ses composantes contravariantes $(\xi^1...\xi^n)$ ou par ses composantes covariantes $\xi_i = g_{ik}\xi^k$; géométriquement cette multiplicité M_n n'est pas autre chose que la multiplicité linéaire tangente à C_n en P ; elle est formée de tous les vecteurs tangents en P à toutes les courbes que l'on peut tracer dans C_n et passant en P. Soit un second point, $Q(y_1...y_n)$ de C_n ; quand peut-on dire que le vecteur $(\eta^1...\eta^n)$ attaché en Q est parallèle à un vecteur $(\xi^1...\xi^n)$ attaché en P ?

Une définition qui répondrait immédiatement à cette question ne serait pas conforme à l'esprit de la géométrie différentielle ; pour être conséquent avec les méthodes riemanniennes, il faut procéder de proche en proche et définir tout d'abord — si cela est possible — parmi tous les vecteurs attachés au point $Q(x_i + dx_i)$ infiniment voisin de $P(x_i)$, celui qui peut être dit parallèle au vecteur (ξ^i). Comme on le sait depuis l'invention du calcul infinitésimal, tout le reste nous sera donné par surcroît.

Voici alors comment nous allons procéder. Traçons une courbe L dans C_n ; soit $P(x_i)$ un point de cette courbe et $\mathbf{a}$ un vecteur quelconque fixe de la M_n attachée à P ; dans cette M_n prenons encore un vecteur $\mathbf{x}_P$ de composantes (ξ^i) ; déplacer $\mathbf{x}_P$ parallèlement à lui-même le long de L de $P(x_i)$ en $Q(x_i + dx_i)$, où il devient le vecteur $\mathbf{x}_Q$, c'est précisément trouver parmi les vecteurs de la M_n attachée à Q, le vecteur $\mathbf{x}_Q$ tel que l'angle que fait $\mathbf{a}$ avec $\mathbf{x}_P$ soit le même que l'angle que fait $\mathbf{a}$ avec $\mathbf{x}_Q$, et tel encore que la mesure du segment déterminé par ce vecteur $\mathbf{x}_Q$ soit égale à la mesure du segment déterminé par le vecteur $\mathbf{x}_P$. Si l'on continue ainsi de proche en proche, on déterminera en chaque point R de la courbe L un vecteur dont les composantes sont des fonctions du paramètre qui caractérise le point de L considéré. Ce sont ces fonctions qu'il s'agit de déterminer par les conditions différentielles que l'on vient d'énoncer.

Pour plus de commodité, nous utilisons un espace linéaire M_N à N dimensions dans lequel C_n est plongé, et tel que la métrique y soit définie, par rapport à un système cartésien toujours aisé à trouver, par la forme :

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_N^2 ;$$

chaque point $P(x_1...x_n)$ de C_n a des coordonnées z_ν définies par des fonctions :

$$z_\nu = z_\nu(x_1...x_n) \qquad (\nu = 1...N)$$

telles que l'on ait :

$$\mathcal{S}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_r}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_s} = g_{rs}, \tag{1}$$

le signe $\mathcal{S}$ indiquant, ici et dans ce qui suit, une sommation par rapport aux différents indices des z, c'est-à-dire de 1 à N ; les g_{rs} sont les coefficients de la forme métrique de C_n lorsqu'on emploie les coordonnées x_i.

La courbe L est définie par certaines équations paramétriques :

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1...n)$$

dans C_n, ou par :

$$z_\nu = z_\nu[x_1(s)...x_n(s)] = z_\nu(s) \qquad (\nu = 1...N)$$

dans M_N.

Soit au point $P_{(0)}(s_{(0)})$, un vecteur $(\xi^1_{(0)}...\xi^n_{(0)})$; il s'agit de trouver des fonctions $\xi^i(s)$ qui se réduisent à $\xi^i_{(0)}$ pour $s = s_{(0)}$ et qui définissent un vecteur $\mathbf{x}$ qui reste parallèle à lui-même et qui conserve sa longueur $l = \sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}$. Cherchons les cosinus directeurs de $\mathbf{x}$ par rapport aux axes cartésiens de M_N.

Les composantes ξ^i sont proportionnelles aux différentielles des coordonnées $\frac{dx_i}{dt}dt$, d'un point P qui se déplace infiniment peu le long de la courbe de C_n dont $\mathbf{x}$ est la tangente ; les cosinus directeurs $\lambda_1...\lambda_N$ sont proportionnels aux différentielles correspondantes des $z_1...z_N$:

$$\frac{\lambda_1}{dz_1} = \frac{\lambda_2}{\partial z_2} = \cdots = \frac{\lambda_N}{dz_N},$$

mais puisque :

$$dz_\nu = \sum_i^{1...n} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}ds$$

et que

$$\frac{\xi^1}{\frac{dx_1}{ds}ds} = \frac{\xi^2}{\frac{dx_2}{ds}ds} = \cdots = \frac{\xi^n}{\frac{dx_n}{ds}ds}.$$

on a :

$$\frac{\lambda_1}{\sum_i \frac{\partial z_1}{\partial x_i}\xi^i} = \frac{\lambda_2}{\sum_i \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\xi^i} = \ldots = \frac{\lambda_n}{\sum_i \frac{\partial z_n}{\partial x_i}\xi^i} = \Lambda$$

mais les λ_ν étant des cosinus directeurs, on doit avoir :

$$\mathbf{S}\lambda_\nu^2 = 1$$

et par suite :

$$\Lambda^2 \mathbf{S}\left(\sum_i \frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\xi^i\right)^2 = 1,$$

c'est-à-dire, d'après (1)

$$\Lambda^2 \sum_{ik} \xi^i \xi^k \cdot \mathbf{S}_{\nu\rho} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial z_\rho}{\partial x_k} = \sum_{ik}(g_{ik}\xi^i\xi^k).\Lambda^2 = 1\,;$$

donc, en prenant le radical positivement :

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_\nu = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}}\cdot\sum \frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\xi^i.$$

Soit alors un vecteur fixe **f** attaché à P, dont les composantes soient $(\varphi^1 \ldots \varphi^n)$; les cosinus directeurs de **f** sont

$$\beta_\nu = \frac{\sum_i \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}\varphi^i}{\sqrt{g_{ik}\varphi^i\varphi^k}}.$$

L'angle A que forme **f** avec **x** est donné par l'équation :

$$\cos A = \mathbf{S}\beta_\nu\lambda_\nu.$$

Or lorsqu'on passe de $P(s)$ en $Q(s+ds)$, les fonctions ξ^i augmentent de $\frac{d\xi^i}{ds}ds$, le nombre $g_{ik}\xi^i\xi^k$ restant constant. Ecrivons que pour cette variation, l'angle A reste constant, ce qui revient à dire que : $d(\cos A) = o$, ou encore,

$$ds\,\mathbf{S}\beta_\nu \frac{d\lambda_\nu}{ds} = o, \qquad (2)$$

mais

$$\frac{d\lambda_\nu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}}\left\{\sum_{ik}\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x_i \partial x_k}\frac{dx_k}{ds}\xi^i + \sum_i \frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\frac{d\xi^i}{ds}\right\}$$

et, en revenant à la formule (2), après avoir remplacé les β en fonction des φ :

$$\frac{ds}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}} S\left[\sum_{ikj}\left\{\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_j}\xi^i\frac{dx_k}{ds}\varphi^j\right\}+\sum_{ij}\left\{\frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_j}\frac{d\xi^i}{ds}\varphi^j\right\}\right]=0.$$

Cette égalité doit être satisfaite quels que soient les φ^i, c'est-à-dire quelle soit la direction **f** *choisie dans* M_n *en* P *). Par conséquent :

$$S\left\{\sum_{ik}\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_j}\xi^i\frac{dx_k}{ds}+\sum_i\frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_j}\cdot\frac{d\xi^i}{ds}\right\}=0. \quad (3)$$

Mais puisqu'on peut intervertir les signes $\sum$ et S et que l'on a :

$$S\frac{\partial z_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_j}=g_{ij}$$

on tire :

$$\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} = S\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_j}.$$

Par suite (3) s'écrit :

$$g_{ij}\frac{d\xi^i}{ds}+\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix}\xi^i\frac{dx_k}{ds}=0.$$

Résolvons ces équations par rapport aux dérivées $\frac{d\xi^i}{ds}$; pour cela il suffit de multiplier par g^{rj} et de sommer par rapport à j ; il vient immédiatement :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\xi^r}{ds}+\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\xi^i\frac{dx_k}{ds}=0\\ \text{ou}\quad &\frac{d\xi^r}{ds}+\Gamma_{ik}{}^r\xi^i\frac{dx_k}{ds}=0\end{aligned}\right\}\ (r=1,\ \ldots,\ n) \quad (4)$$

Ces équations forment un système différentiel linéaire qui définit les n fonctions $\xi^i(s)$; les coefficients sont en effet, des fonctions de s quand la courbe L est donnée, et le théorème de Cauchy nous apprend que si $P_{(0)}$ est un point régulier pour les coefficients de ce

*) Il est clair que si l'on écrit d (cos A) = o pour toutes les directions de M_N, on retrouvera la définition ordinaire du parallélisme dans un espace euclidien.

système, il existe une solution et une seule qui prenne en $P_{(0)}$ des valeurs arbitraires. Le problème posé est donc résolu ; la définition que nous avons donnée du transfert par parallélisme d'un vecteur d'un point au point voisin, permet d'établir une correspondance univoque et linéaire entre les vecteurs des multiplicités linéaires M_n attachées aux différents points d'une courbe C.

Démontrons que, si un vecteur $\eta^i(s)$ qui dépend du point de la courbe où on le considère, forme avec le vecteur $\xi^i(s)$ un angle constant, les fonctions $\eta^i(s)$ satisfont aux équations :

$$\frac{d\eta^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} rk \\ i \end{matrix} \right\} \eta^r \frac{dx_k}{ds} = 0$$

qui définissent précisément le déplacement parallèle du vecteur η^i. Ce n'est évidemment pas restreindre la généralité de la démonstration que de supposer que les deux vecteurs $\xi^i(s)$ et $\eta^i(s)$ déterminent deux segments de longueurs égales à un :

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = 1 \qquad g_{ik}\eta^i\eta^k = 1.$$

Puisque l'angle θ des deux vecteurs est donné par :

$$\cos \theta = g_{ik}\xi^i\eta^k$$

et que $\dfrac{d \cos \theta}{ds} = 0$ puisque l'angle est constant, on a :

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_r}{ds} \xi^i\eta^k + g_{ik}\xi^i \frac{d\eta^k}{ds} + g_{ik}\eta^k \frac{d\xi^i}{ds} = 0,$$

mais $\dfrac{d\xi^i}{ds}$ est donné par les équations (4), il vient alors :

$$g_{ik}\xi^i \frac{d\eta^k}{ds} - g_{ik} \left\{ \begin{matrix} lr \\ i \end{matrix} \right\} \xi^l \frac{dx_r}{ds} \eta^k + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \xi^i\eta^k \frac{dx_r}{ds} = 0$$

ou :

$$g_{ik}\xi^i \frac{d\eta^k}{ds} - \xi^i\eta^k \frac{dx_r}{ds}\left(\left[\begin{matrix} ir \\ k \end{matrix} \right] - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right) = 0$$

d'où :

$$\xi^i \left[g_{ik} \frac{d\eta^k}{ds} + \eta^k \frac{dx_r}{ds} \left[\begin{matrix} rk \\ i \end{matrix} \right] \right] = 0.$$

Cette équation doit être satisfaite quels que soient les $\xi^i(s)$ satis-

faisant aux équations (4) ; or en un point, on peut se donner arbitrairement les ξ^i, par conséquent en ce point, l'on doit avoir :

$$g_{ik}\frac{d\eta_i^k}{ds}+\begin{bmatrix} rk \\ i \end{bmatrix}\eta_i^k\frac{dx_r}{ds}=0.$$

Ces équations doivent d'ailleurs être satisfaites en tous les points de la courbe L puisque chaque point peut être considéré comme point de départ avec des conditions initiales quelconques. Une transformation simple permet de mettre les équations précédentes sous la forme :

$$\frac{d\eta_i^l}{ds}+\begin{Bmatrix} rk \\ l \end{Bmatrix}\eta_i^k\frac{dx_r}{ds}=0.$$

La réciproque est évidente.

Par conséquent : deux vecteurs qui se déplacent parallèlement à eux-mêmes le long d'une même courbe forment toujours le même angle en tous les points de cette courbe. Nous utiliserons bientôt cette remarque.

Lignes géodésiques. — Une ligne géodésique du continuum C_n est une courbe G telle que *sa tangente se déplace parallèlement à elle-même* lorsqu'elle passe d'un point de la courbe au point voisin.

Considérons le vecteur dont les composantes sont $\xi^i = \frac{dx_i}{ds}$; ce vecteur est tangent à la courbe L ; en écrivant qu'il se déplace parallèlement à lui-même d'un point à un autre, on écrit des équations qui définissent les fonctions $x_i(s)$, c'est-à-dire une courbe qui, d'après la définition, est une géodésique.

Ces équations sont évidemment :

$$\frac{d\left(\frac{dx_i}{ds}\right)}{ds}+\begin{Bmatrix} rt \\ i \end{Bmatrix}\frac{dx_r}{ds}\frac{dx_t}{ds}=0$$

C'est-à-dire :

$$\frac{d^2x_i}{ds^2}+\begin{Bmatrix} rt \\ i \end{Bmatrix}\frac{dx_r}{ds}\frac{dx_t}{ds}=0 \qquad (i=1,\dots n)$$

ou

$$\frac{d^2x_i}{ds^2}+\Gamma_{rt}{}^i\frac{dx_r}{ds}\frac{dx_t}{ds}=0.$$

Ce système différentiel n'est plus forcément linéaire puisque les

$\left\{ \begin{matrix} rt \\ i \end{matrix} \right\}$ sont des fonctions des x_i qui peuvent être quelconques. Le théorème de Cauchy nous apprend que ces équations admettent une solution et une seule prenant pour la valeur régulière $s = s_0$ des valeurs arbitraires x_i définissant un point de C_n, et telle encore que les dérivées $\frac{dx_i}{ds}$ prennent en $s = s_0$ des valeurs données d'avance. Cela veut dire qu'une géodésique est déterminée par l'un de ses points et par sa tangente en ce point.

On peut dire dans un langage un peu vague, qu'une géodésique est une ligne qui conserve sa direction ; à cet égard, elle joue dans le C_n le même rôle que celui que la droite joue dans une multiplicité linéaire M_n.

Appliquons ces résultats à un exemple simple ; soit une sphère de rayon égal à l'unité ; prenons la latitude x_1 et la longitude x_2 comme coordonnées sur sa surface ; l'élément linéaire est donné par :

$$ds^2 = dx_1{}^2 + \cos^2 x_1 . dx_2{}^2$$

on a :

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0 \qquad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0 \qquad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \sin x_1 \cos x_1$$

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 \qquad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\operatorname{tg} x_1, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Les équations du déplacement parallèle le long d'un parallèle :

$$x_1 = \text{const}, \qquad x_2 = \frac{s}{\cos x_1}$$

sont alors :

$$\frac{d\xi^1}{ds} + \sin x_1 \cos x_1 . \xi^2 . \frac{1}{\cos x_1} = 0$$

$$\frac{d\xi^2}{ds} - \operatorname{tg} x_1 . \xi^1 . \frac{1}{\cos x_1} = 0.$$

ou :

$$\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2 \sin x_1 = 0$$

$$\frac{d\xi^2}{ds} - \xi^1 \frac{\sin x_1}{\cos^2 x_1} = 0.$$

L'intégrale générale de ce système est :

$$\xi^1 = A \cos(\gamma s + B), \qquad \xi^2 = -\frac{A}{\cos x_1} \sin(\gamma s + B)$$

où $\gamma = \operatorname{tg} x_1$. Supposons que pour $s = 0$, on doive avoir $\xi^1 = \alpha$, $\xi^2 = 0$, alors

$$\xi^1 = \alpha \cos \gamma s \qquad \xi^2 = -\frac{\alpha}{\cos x_1} \sin \gamma s$$

L'angle θ que le vecteur déplacé fait avec le parallèle est une fonction de s, on a :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma s.$$

Par suite :

$$\frac{d\theta}{ds} = -\gamma = -\operatorname{tg} x_1.$$

La dérivée $\frac{d\theta}{ds}$ est égale à la courbure géodésique de L au point considéré (le résultat est général).

Déplacement parallèle d'un vecteur covariant.

Cherchons les équations qui définissent les composantes covariantes $\xi_i(s)$ d'un vecteur qu'on déplace parallèlement à lui-même le long de la courbe L que nous avons déjà utilisée plus haut. Pour y arriver, considérons un vecteur auxiliaire donné par ses composantes contravariantes $\eta_i(s)$, et qui se déplace parallèlement à lui-même le long de L. D'après ce que nous avons vu plus haut, l'angle de ces deux vecteurs ne change pas, en quelque point de la courbe qu'on les considère ; or, puisque les mesures des segments qu'ils déterminent sont inaltérés par définition, il s'ensuit que le produit scalaire de ces deux vecteurs est indépendant de la valeur s du paramètre caractérisant le point de la courbe où on les considère :

$$\frac{d}{ds}(\xi_i \eta^i) = 0 ;$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\xi_i}{ds} \eta^i + \xi_r \frac{d\eta^r}{ds} = 0. \tag{5}$$

Or d'après les équations qui définissent le déplacement parallèle d'un vecteur contravariant, on a :

$$\frac{d\eta^r}{ds} = - \Gamma_{ik}^r \eta^i \frac{dx_k}{ds}$$

et par suite, les équations (5) deviennent :

$$\eta^i \left(\frac{d\xi_i}{ds} - \Gamma_{ik}^r \xi_r \frac{dx_k}{ds} \right) = 0.$$

Par suite d'un raisonnement qui a déjà été fait plus haut, il faut que :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi_i}{ds} - \Gamma_{ik}^r \xi_r \frac{dx_k}{ds} = 0 \\ \text{ou} \quad &\frac{d\xi_i}{ds} - \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \xi_r \frac{dx_k}{ds} = 0 \end{aligned}\right\} i = 1,2,\dots n.$$

Les $\xi_i(s)$ sont encore déterminés par un système de n équations différentielles linéaires.

Déplacement parallèle d'un tenseur. — Reprenons la courbe L tracée dans le continuum C_n. Imaginons que, en chaque point $P(s)$ de L, nous ayons fixé un tenseur dont les composantes $a_{ik}{}^l{}_m$ sont des fonctions de s (nous prenons un tenseur du 4e ordre pour fixer les idées, mais nos raisonnements s'appliquent à tous les cas). Comment faut-il choisir ces fonctions pour que l'on puisse dire que les composantes $a_{ik}{}^l{}_m$ définissent le même tenseur en chaque point de L ?

Considérons pour y arriver 4 vecteurs **x**, **y**, **z**, **t** attachés en chaque point de L et constamment parallèles à eux-mêmes. Nous définirons tout naturellement les $a_{ik}{}^l{}_m(s)$ par la condition que l'invariant :

$$A = a_{ik}{}^l{}_m \xi^i \eta^k \zeta_l \tau^m$$

soit indépendant de s. En d'autres termes, un tenseur d'ordre k portant sur k vecteurs se déplace parallèlement à lui-même, si condéré comme une forme *k-linéaire* de k vecteurs qui se déplacent parallèlement à eux-mêmes, il conserve une valeur constante. Les $a_{ik}{}^l{}_m$ sont donc définies par la condition :

$$\frac{dA}{ds} = 0 \qquad (6)$$

où les ξ^i, η^k, ζ_l, τ^m sont des fonctions quelconques assujetties à la seule condition de vérifier les équations :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{pk}{}^i \xi^p \frac{dx_k}{ds} &= 0 \\
\frac{d\eta^i}{ds} + \Gamma_{qk}{}^i \eta^q \frac{dx_k}{ds} &= 0 \\
\frac{d\zeta_i}{ds} - \Gamma_{ki}{}^r \zeta_r \frac{dx_k}{ds} &= 0 \\
\frac{d\tau^i}{ds} + \Gamma_{tk}{}^i \tau^t \frac{dx_k}{ds} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (7) \qquad (i = 1,2,\dots n)$$

L'équation (6) s'écrit alors :

$$\xi^p \eta^q \zeta_r \tau^t \Big(\frac{da_{pq}{}^r{}_t}{ds} - \Gamma_{pq}{}^i a_{iq}{}^r{}_t \frac{dx_k}{ds} - \Gamma_{qk}{}^i a_{pi}{}^r{}_t \frac{dx_k}{ds} + \Gamma_{ik}{}^r a_{pq}{}^i{}_t \frac{dx_k}{ds} - \Gamma_{tk}{}^i a_{pq}{}^r{}_i \frac{dx_k}{ds} \Big) = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu quelles que soient les fonctions $\xi^p(s)$, $\eta^q(s)$, $\zeta_r(s)$, $\tau^t(s)$ assujetties seulement aux conditions (7), il faut et il suffit que :

$$\frac{da_{pq}{}^r{}_t}{ds} + (-\Gamma_{pk}{}^i a_{iq}{}^r{}_t - \Gamma_{qk}{}^i a_{pi}{}^r{}_t + \Gamma_{ik}{}^r a_{pq}{}^i{}_t - \Gamma_{tk}{}^i a_{pq}{}^r{}_i) \frac{dx_k}{ds} = 0.$$

L'on obtient ainsi un système d'équations différentielles linéaires pour définir les $a_{pq}{}^r{}_t$, et le théorème de Cauchy nous apprend que — toutes les singularités étant écartées — les $a_{pq}{}^r{}_t$ sont univoquement déterminées par ces équations et par la donnée des valeurs de ces fonctions pour une valeur arbitraire de s.

Dépendance du chemin ; multiplicité euclidienne.

Nous allons modifier très légèrement les équations du déplacement d'un vecteur. Considérons le vecteur aux composantes ξ^i attaché en $P(x_1, x_2, \dots x_n)$; soient $\xi^i + d\xi^i$ ses composantes en $P'(x_k + dx_k)$ lorsqu'il a été déplacé parallèlement à lui-même le long de l'élément de ligne PP' ; nous avons bien évidemment :

$$d\xi^i + \Gamma_{rt}{}^i \xi^r dx_t = 0 \qquad (8)$$

Nous pouvons alors regarder ces équations aux différentielles totales comme définissant les composantes $\xi^i(x_1 \dots x_n)$ d'un vecteur attaché en tout point de C_n et constamment parallèle à lui-même.

Mais pour que cette manière de voir soit légitime, il faut que les équations (8) soient complètement intégrables, sinon alors il est impossible de trouver des fonctions $\xi^i(x_1...x_n)$ bien déterminées et caractérisant un seul vecteur en chaque point de C_n; le parallélisme n'est donc pas univoquement caractérisé en général, et les équations que nous avons données plus haut donnent des solutions qui dépendent effectivement du chemin choisi pour le déplacement du vecteur. Le seul cas où elles n'en dépendent jamais, c'est celui pour lequel les g_{ik} de la forme métrique sont tels que les équations (8) sont complètement intégrables. Or ces équations nous donnent :

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} = -\Gamma_{rk}{}^i\,\xi^r$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_l} = -\Gamma_{rl}{}^i\,\xi^r.$$

Les conditions d'intégrabilité :

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_l}\right) \qquad (9)$$

doivent être des identités, quand on tient compte des équations (8). Or :

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial \Gamma_{rk}{}^i}{\partial x_l}\,\xi^r - \Gamma_{rk}{}^i\,\frac{\partial \xi^r}{\partial x_l} = -\frac{\partial \Gamma_{tk}{}^i}{\partial x_l}\,\xi^t + \Gamma_{rk}{}^i\,\Gamma_{lt}{}^r\,\xi^t$$

de même :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_l}\right) = -\frac{\partial \Gamma_{tl}{}^i}{\partial x_k}\,\xi^t + \Gamma_{rl}{}^i\,\Gamma_{kt}{}^r\,\xi^t.$$

Les relations (9) deviennent alors :

$$\xi^t\left[\frac{\partial \Gamma_{tl}{}^i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{tk}{}^i}{\partial x_l} + \Gamma_{kt}{}^r\,\Gamma_{rl}{}^i - \Gamma_{lt}{}^r\,\Gamma_{rk}{}^i\right] = 0$$

ou encore, eu égard aux définitions du chapitre V :

$$R_t{}^i{}_{,lk}\,\xi^t = 0.$$

Cette forme linéaire doit être nulle quel que soit le vecteur $\mathbf{x}(\xi)$, on a donc identiquement :

$$R_t{}^i{}_{,lk} = 0$$

ou encore, ce qui revient au même :

$$R_{ik,lm} = 0.$$

Ces identités caractérisent donc un continuum où la métrique est telle que le déplacement parallèle soit univoque.

Un tel continuum est dit *euclidien.*

Si donc un continuum est tel que le tenseur de Riemann qui lui est attaché est identiquement nul, ce continuum est euclidien.

CHAPITRE VII

ANALYSE TENSORIELLE DANS UN CONTINUUM RIEMANNIEN

Ce n'est que maintenant, après avoir fait un assez long exposé préliminaire que nous sommes en mesure d'étudier les champs de tenseurs dans un continuum riemannien C_n.

Un champ tensoriel d'ordre k est donné dans C_n, quand en chaque point $P(x_1 \ldots x_n)$ du continuum, on a attaché un tenseur d'ordre k. Les composantes de ce tenseur sont donc des fonctions des coordonnées $(x_1 \ldots x_n)$ du point P; nous les supposerons continues et dérivables quand nos calculs l'exigeront.

Pour trouver, dans le cas des multiplicités linéaires, le taux de la variation des composantes d'un champ tensoriel en un point, nous utilisions des vecteurs auxiliaires invariables (voir Chap. IV). Dans un continuum C_n, la notion de vecteur invariable n'a pas de sens, mais nous avons appris à reconnaître ce que devient un vecteur qui se déplace parallèlement à lui-même d'un point à un point infiniment voisin ; c'est évidemment la notion de vecteur déplacé parallèlement à lui-même qui va remplacer la notion de vecteur invariable, avec laquelle elle se confond d'ailleurs dans le cas particulier où le continuum C_n dégénère en une multiplicité linéaire.

Considérons alors un champ de tenseurs du $k^{i\grave{e}me}$ ordre (du 4° pour fixer les idées) dont les composantes sont les fonctions $a_i{}^{kl}{}_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Au point P, imaginons 4 vecteurs quelconques de composantes : ξ^i, η_k, ζ_l, τ^m et formons en ce point l'invariant :

$$A = a_i{}^{kl}{}_m \xi^i \eta_k \zeta_l \tau^m.$$

Passons maintenant au point $P'(x_i + dx_i)$, en déplaçant les 4 vecteurs auxiliaires parallèlement à eux-mêmes ; en ce point les fonctions $a_i{}^{kl}{}_m$ valent :

$$a_i{}^{kl}{}_m(x_1 \dots x_n) + da_i{}^{kl}{}_m$$

et les vecteurs auxiliaires y ont respectivement des composantes :

$$\begin{aligned}
\xi^i &+ d\xi^i \text{ avec } d\xi^i = -\Gamma_{ph}{}^i \xi^p dx_h \\
\eta_k &+ d\eta_k \text{ avec } d\eta_k = \Gamma_{kh}{}^q \eta_q dx_h \\
\zeta_l &+ d\zeta_l \text{ avec } d\zeta_l = \Gamma_{lh}{}^r \zeta_r dx_h \\
\tau^m &+ d\tau^m \text{ avec } d\tau^m = -\Gamma_{th}{}^m \tau^t dx_h.
\end{aligned}$$

De P en P', l'invariant A a augmenté de dA, et l'on a :

$$\begin{aligned}
dA &= da_p{}^{qr}{}_t \xi^p \eta_q \zeta_r \tau^t \\
&+ a_i{}^{qr}{}_t \eta_q \zeta_r \tau^t d\xi^i + a_p{}^{kr}{}_t \xi^p \zeta_r \tau^t d\eta_k \\
&+ a_p{}^{ql}{}_t \xi^p \eta_q \tau^t d\zeta_l + a_p{}^{qr}{}_m \xi^p \eta_q \zeta_r \tau^m.
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque

$$da_p{}^{qr}{}_t = \sum_h \frac{\partial a_p{}^{qr}{}_t}{\partial x_h} dx_h,$$

l'on a :

$$dA = \left[\frac{\partial a_p{}^{qr}{}_t}{\partial x_h} - \Gamma_{ph}{}^i a_i{}^{qr}{}_t + \Gamma_{kh}{}^q a_p{}^{kr}{}_t + \Gamma_{lh}{}^r a_p{}^{ql}{}_t - \Gamma_{th}{}^m a_p{}^{qr}{}_m \right] \xi^p \eta_q \zeta_r \tau^t dx_h.$$

Or dA étant la différence de deux invariants en P, est un invariant en P ; par conséquent puisque ξ^p, η_q, ζ_r, τ^t, dx_h sont les composantes de 5 vecteurs en P, les fonctions :

$$a_p{}^{qr}{}_{t/h} = \frac{\partial a_p{}^{qr}{}_t}{\partial x_h} - \Gamma_{ph}{}^i a_i{}^{qr}{}_t + \Gamma_{kh}{}^q a_p{}^{kr}{}_t + \Gamma_{lh}{}^r a_p{}^{ql}{}_t - \Gamma_{th}{}^m a_p{}^{qr}{}_m$$

représentent les composantes d'un champ de tenseurs d'ordre $k + 1$ [ici $(4 + 1)$].

Ce tenseur est appelé *la dérivée covariante du champ donné*, au point P.

Plus généralement, la dérivée covariante d'un champ tensoriel d'ordre $p + q$: $a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1, i_2, \dots i_p}$ est un nouveau tenseur d'ordre $(p + 1) + q$ ($p + 1$ fois covariant et q fois contravariant) :

$a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1, i_2, \dots i_p/h}$ qui se calcule grâce à la méthode précédente, par la formule :

$$a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1, i_2, \dots i_p/h} = \frac{\partial a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{r=q} \Gamma_{lh}{}^{k_r} a^{k_1 \dots k_{r-1} l k_{r+1} \dots k_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} - \sum_{t=1}^{t=p} \Gamma_{i_t h}{}^{l} a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1 \dots i_{t-1} l i_{t+1} \dots i_p}.$$

Nous indiquerons les indices des dérivations covariantes au moyen d'un trait qui les séparent des indices du tenseur donné.

Appliquons ces considérations générales au cas d'un champ vectoriel. Soit d'abord un champ vectoriel covariant $\xi_i(x_1 \dots x_n)$; formons avec le vecteur dont les composantes en $P(x_i)$ sont η^k, l'invariant $\xi_i \eta^i$ et calculons sa variation lorsqu'on passe de $P(x_i)$ à $P'(x_i + dx_i)$, le vecteur η^k se déplaçant parallèlement à lui-même, on a :

$$d(\xi_i \eta^i) = \xi_i d\eta^i + \eta^r d\xi_r$$

or $$d\eta^i = -\Gamma_{rh}{}^i \eta^r dx_h$$

et $$d\xi_r = \frac{\partial \xi_r}{\partial x_h} \partial x_h.$$

Il vient donc :

$$d(\xi_i \eta^i) = \left[\frac{\partial \xi_r}{\partial x_h} - \Gamma_{rh}{}^i \xi_i\right] \eta^r dx_h.$$

La dérivée covariante du champ ξ_i est donc définie par les composantes :

$$\xi_{i/h} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_h} - \Gamma_{ih}{}^l \xi_l.$$

On verrait encore de même que la dérivée covariante du champ vectoriel contravariant $\xi^i(x_1 \dots x_n)$ est définie par les formules :

$$\xi^i{}_{/h} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_h} + \Gamma_{lh}{}^i \xi^l.$$

Reprenons les équations qui définissent le déplacement parallèle d'un tenseur $a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$; elles s'écrivent :

$$\frac{da^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}}{ds} + \sum_{r=1}^{r=q} \Gamma_{lh}{}^{k_r} a^{k_1 \dots k_{r-1} l k_{r+1} \dots k_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{dx_h}{ds} - \sum_{t=1}^{t=p} \Gamma_{i_t h}{}^{l} a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1 \dots i_{t-1} l i_{t+1} \dots i_p} \frac{dx_h}{ds} = 0.$$

On peut les transformer aisément en :

$$a^{k_1 k_2 \dots k_q}_{i_1 i_2 \dots i_p / h} \frac{dx_h}{ds} = 0.$$

car

$$\frac{d}{ds} = \sum_h \frac{\partial}{\partial x_h} \cdot \frac{dx_h}{ds}.$$

Cela montre que la définition du déplacement parallèle est une définition invariante. On voit encore par là que si la dérivée covariante d'un champ tensoriel est nulle au point P, ce champ dans le voisinage de P s'obtient tout simplement, en déplaçant parallèlement à lui-même le tenseur attaché en P. Un tel champ est dit *stationnaire* en P.

Le champ tensoriel qu'on obtient le long d'une courbe L en déplaçant parallèlement à lui-même un tenseur attaché en un point de cette courbe est un *champ stationnaire en tout point de L*. On conçoit que par suite de la dépendance que manifeste le déplacement parallèle envers le chemin de transport, un champ tensoriel ne peut être en général stationnaire en tous les points de C_n. Pourtant un théorème dit *théorème de Ricci*, nous apprend que le *tenseur métrique* g_{ik} est précisément *stationnaire en tous les points de* C_n. En effet :

$$g_{ik/h} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_h} - \Gamma_{ih}{}^l g_{kl} - \Gamma_{kh}{}^l g_{il} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_h} - \Gamma_{ih,k} - \Gamma_{kh,i} = 0.$$

De même $g^{ik}{}_{/h} = 0$.

Nous allons poursuivre cette étude en donnant une signification plus intuitive encore de la dérivée covariante. Pour ne pas compliquer les notations, nous nous bornerons au cas d'un champ vectoriel covariant.

Soit donc un champ vectoriel $\xi_i(x_1 \dots x_n)$; transportons de $P(x_i)$ en $P'(x_i + dx_i)$ le vecteur ξ_i, parallèlement à lui-même, le long de $\overrightarrow{PP'}$. Il devient en P' :

$$\xi_i - \Gamma_{rh}{}^i \xi^r dx_h.$$

Mais en P', le champ a pour valeur :

$$\xi_i + \sum_h \frac{\partial \xi_i}{\partial x_h} dx_h.$$

La différence de ces deux vecteurs en P' mesure donc la variation du champ, puisqu'elle porte précisément sur deux vecteurs attachés au même point, dont l'un est le vecteur en P transporté en P' et l'autre le vecteur en P'. Cette différence est :

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h} + \Gamma_{rh}{}^i \xi^r\right) dx_h = \xi_{i/h}\, dx_h \ ;$$

par conséquent, le *taux* de la variation du champ $\xi_i(x_1 \ldots x_n)$ suivant la ligne de coordonnées qui passe par P et sur laquelle seule x_h varie, est mesurée par la *dérivée covariante* $\xi_{i/h}$.

Ce sont ces considérations applicables à tout champ tensoriel qui justifient la dénomination de dérivée covariante.

Ainsi donc, la dérivation covariante d'un champ tensoriel d'ordre k, est une opération qui permet d'obtenir à partir du champ donné, un nouveau champ d'ordre $k+1$, le nouvel indice étant un indice de covariance.

Dérivée contravariante. — Une notion peu utilisée dans les applications, mais que nous définirons quand même pour la symétrie de l'exposition est celle de *dérivée contravariante* $a_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_q/l}$ d'un champ tensoriel $a_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_q}$; c'est tout simplement un ensemble de fonctions qui définissent le même champ que celui que définit la dérivée covariante, seulement on l'écrit avec le nouvel indice en haut :

$$a_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_q/l} = g^{hl} a_{i_1 \ldots i_p/h}^{k_1 \ldots k_q} \, .$$

Calcul des dérivées covariantes pour une somme ou pour un produit de tenseurs. — La *dérivée covariante d'une somme* de plusieurs tenseurs de même ordre et de même espèce, est égale à la *somme des dérivées covariantes* des tenseurs donnés. Cette proposition est évidente.

La *dérivée covariante d'un produit* de deux tenseurs s'obtient par la *même règle* que celle qui donne la *dérivée ordinaire d'un produit de deux fonctions* dans le calcul différentiel ordinaire. Ainsi de

$$c_{ik}{}^l = a_{ik} b^l$$

on tire :

$$c_{ik}{}^l{}_{/h} = a_{ik/h} b^l + a_{ik} b^l{}_{/h}.$$

En effet :

$$c_{ik}{}^{l}{}_{/h} = \frac{\partial(a_{ik}b^l)}{\partial x_h} + \Gamma_{rt}{}^{l}(a_{ik}b^t) - \Gamma_{ir}{}^{t}(a_{tk}b^l) - \Gamma_{kr}{}^{t}(a_{it}b^l)$$

$$= b^l\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h} - \Gamma_{ir}{}^{t}a_{tk} - \Gamma_{kr}{}^{t}a_{it}\right) + a_{ik}\left(\frac{\partial b^l}{\partial x_h} + \Gamma_{rt}{}^{l}b^t\right) = b^l a_{ik/h} + a_{ik}b^l{}_{/h}.$$

Nous jugeons inutile de donner une démonstration pour le cas général ; le cas particulier que nous venons de développer étant suffisamment expressif.

Si l'un des facteurs est le tenseur métrique, la règle se simplifie puisque le tenseur métrique a sa dérivée covariante nulle ; si, par exemple :

$$f_{ikl}{}^{m} = g_{ik}a_l{}^{m}$$

on a :

$$f_{ikl}{}^{m}{}_{/h} = g_{ik}a_l{}^{m}{}_{/h}.$$

Remarques. — *I.* — La contraction d'un champ tensoriel et sa dérivation covariante sont deux opérations permutables.

Montrons-le avec un cas particulier ; la démonstration générale s'en déduisant aisément.

Soit $a_{ik}{}^{lm}$ un champ tensoriel ; on a :

$$a_{ik}{}^{lm}{}_{/h} = \frac{\partial a_{ik}{}^{lm}}{\partial x_h} + \Gamma_{rh}{}^{l}a_{ik}{}^{rm} + \Gamma_{rh}{}^{m}a_{ik}{}^{lr} - \Gamma_{ih}{}^{r}a_{rk}{}^{lm} - \Gamma_{kh}{}^{r}a_{ir}{}^{lm}.$$

Contractons le tenseur donné, et posons par exemple :

$$b_k{}^{l} = a_{ik}{}^{li} ;$$

je dis que

$$b_k{}^{l}{}_{/h} = a_{ik}{}^{li}{}_{/h}.$$

En effet :

$$b_k{}^{l}{}_{/h} = \frac{\partial b_k{}^{l}}{\partial x_h} + \Gamma_{rh}{}^{l}b_k{}^{r} - \Gamma_{kh}{}^{r}b_r{}^{l}$$

mais :

$$a_{ik}{}^{li}{}_{/h} = \frac{\partial a_{ik}{}^{li}}{\partial x_h} + \Gamma_{rh}{}^{l}a_{ik}{}^{ri} + \Gamma_{rh}{}^{i}a_{ik}{}^{lr} - \Gamma_{ih}{}^{r}a_{rk}{}^{li} - \Gamma_{kh}{}^{r}a_{ir}{}^{li} ;$$

le 3ᵉ et le 4ᵉ termes s'entre-détruisent puisque leurs formes ne diffèrent que par les désignations du nom de l'indice de sommation ; il reste alors :

$$a_{ik}{}^{li}{}_{/h} = \frac{\partial a_{ik}{}^{li}}{\partial x_h} + \Gamma_{rh}{}^{l}a_{ik}{}^{ri} - \Gamma_{kh}{}^{r}a_{ir}{}^{li},$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

II. — La dérivation covariante d'un tenseur et l'abaissement (ou l'élévation) d'un indice dans les composantes de ce tenseur sont deux opérations permutables. Prenons le tenseur $a_{ik}{}^{lm}$, abaissons l'indice l :

$$a_{ikj}{}^{m} = g_{jl}\, a_{ik}{}^{lm} \quad ;$$

formons $a_{ik}{}^{lm}{}_{/h}$ et abaissons l'indice l,

$$a_{ikj}{}^{m}{}_{/h} = g_{jl}\, a_{ik}{}^{lm}{}_{/h}.$$

Je dis que la dérivée covariante de $g_{jl}\, a_{ik}{}^{lm}$ est précisément $a_{ikj}{}^{m}{}_{/h}$; en effet, dans les dérivations covariantes le tenseur métrique joue le même rôle qu'une constante dans le calcul différentiel classique.

Ce sont les deux remarques qui précèdent qui justifient complètement la notation que nous avons adoptée pour la dérivée covariante *.

Dérivées successives. — D'un champ tensoriel d'ordre k, on obtient par dérivation covariante un champ d'ordre $k+1$; en dérivant celui-ci de la même manière, on obtient un champ tensoriel d'ordre $k+2$, etc...

Soit $a^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p/h}$ la dérivée covariante du tenseur $a^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p}$; dérivons-la une seconde fois et soient $a^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p/hj}$ les composantes du nouveau champ. Je dis que l'on n'a pas en général :

$$a^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p/hj} = a^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p/jh}.$$

Montrons-le sur un exemple simple ; soit $a_i(x_1 \dots x_n)$ un champ du 1[er] ordre, on a :

$$a_{i/h} = \frac{\partial a_i}{\partial x_h} - \Gamma_{ih}{}^{r} a_r$$

$$a_{i/hk} = \frac{\partial a_{i/h}}{\partial x_k} - \Gamma_{ik}{}^{r} a_{r/h} - \Gamma_{hk}{}^{r} a_{i/r}$$

$$= \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{ih}{}^{l}}{\partial x_k} a_l - \Gamma_{ih}{}^{l} \frac{\partial a_l}{\partial x_k}$$

$$- \Gamma_{ik}{}^{r} \frac{\partial a_r}{\partial x_h} + \Gamma_{ik}{}^{r} \Gamma_{rh}{}^{l} a_l - \Gamma_{hk}{}^{r} \frac{\partial a_i}{\partial x_r} + \Gamma_{hk}{}^{r} \Gamma_{ir}{}^{l} a_l ;$$

* Tout ce qui précède s'applique à la dérivation contravariante.

et par suite, toutes réductions faites

$$a_{i/hk} - a_{i/kh} = a_l \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}{}^l}{\partial x_h} - \frac{\partial \Gamma_{ih}{}^l}{\partial x_k} + \Gamma_{ik}{}^r \Gamma_{rh}{}^l - \Gamma_{ih}{}^r \Gamma_{rk}{}^l \right]$$

c'est-à-dire :

$$a_{i/hk} - a_{i/kh} = R_i{}^l{}_{,kh}\, a_l.$$

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser cette formule pour un champ quelconque ; nous nous contentons d'avoir montré par un exemple que les dérivées covariantes secondes ne sont pas symétriques par rapport aux indices de dérivation. C'est là un point auquel on devait s'attendre, étant donné la dépendance que le déplacement parallèle manifeste vis-à-vis du chemin de transport.

Tenseurs linéaires. — Il existe quelques combinaisons intéressantes et simples des dérivées covariantes de certains champs ; leurs expressions ne contiennent que des dérivées usuelles. Ces combinaisons caractérisent des tenseurs qu'on appelle *linéaires* et dont l'importance en physique est considérable.

Les dérivées partielles d'une fonction $f(x_1 \ldots x_n)$ sont les composantes d'un tenseur du premier ordre ; en effet, ces dérivées ne sont pas autre chose que les composantes de la dérivée covariante du scalaire f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{/i}.$$

Le tenseur $f_{/i}$ est un champ tensoriel linéaire du 1er ordre. Soit un champ du 1er ordre $h_i(x_1 \ldots x_n)$ quelconque d'ailleurs ; formons les deux tenseurs :

$$H_{ik} = h_{i/k} \quad \text{et} \quad H'_{ik} = h_{k/i} ;$$

les fonctions :

$$h_{ik} = H_{ik} - H'_{ik}$$

sont les composantes d'un tenseur symétrique gauche du second ordre ; c'est un tenseur linéaire du second ordre. L'on a :

$$h_{ik} = \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \Gamma_{ik}{}^r h_r - \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_i} - \Gamma_{ki}{}^r h_r \right)$$

$$h_{ik} = \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} .$$

Ce tenseur est parfois appelé le *curl* du champ tensoriel h_i, par analogie avec une dénomination du calcul vectoriel.

On démontre de même que tout tenseur du second ordre symétrique gauche f_{ik} (il n'est pas nécessaire qu'il soit linéaire) donne naissance à un nouveau tenseur linéaire du 3[e] ordre, par les relations :

$$f_{ikl} = f_{ik/l} + f_{kl/i} + f_{li/k}$$

qui se réduisent à cause de $f_{ik} = -f_{ki}$, à

$$f_{ikl} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k}.$$

Ce nouveau tenseur est symétrique gauche. On poursuit aisément pour des champs d'ordre supérieur *.

Nous avons terminé l'exposé des principes essentiels du calcul différentiel absolu. Le lecteur serait en droit d'exiger qu'on lui donnât ici quelques applications de la théorie développée dans ces deux derniers chapitres, mais comme les applications les plus intéressantes sont d'ordre physique, et que l'initiation aux théories physiques exigerait de longs développements, nous nous bornons à renvoyer le lecteur aux traités sur les théories d'Einstein ; notre but sera réalisé si notre petit livre l'aide à comprendre les calculs compliqués au moyen desquels ces théories sont établies.

* M. Weyl démontre le caractère tensoriel de ces expressions par une autre méthode plus suggestive pour les applications physiques. Voir Weyl, Temps Espace, Matière, p. 91 et suivantes.

BIBLIOGRAPHIE

Nous n'avons pas la prétention d'épuiser dans ces courtes notices, toute la bibliographie relative au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu. Nous négligeons systématiquement les travaux relatifs aux théories de *M. Einstein*, la bibliographie en a été faite par *M. Weyl* dans son remarquable ouvrage : *Temps, Espace, Matière*.

On consultera avec profit le petit livre suivant :

J.-E. Wright : Invariants of quadratic differential forms, Combridge Tracts, n° 9, 1908. C'est un excellent résumé, trop condensé parfois, des différentes méthodes de calcul différentiel absolu.

Le mémoire fondamental, sur ces questions, malheureusement épuisé et introuvable en librairie, est le suivant :

Ricci et *Levi-Civita* : Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications (Math. Annalen, Bd. 54, 1900).

Ce mémoire étant fondamental, nous en donnons les titres de chapitres, avec un bref résumé.

I. — Algorithme du calcul différentiel absolu. [Définition des tenseurs (avant la lettre), exposition de l'algèbre et de l'analyse tensorielles].

II. — La géométrie intrinsèque comme instrument de calcul. [Systèmes orthogonaux de congruences ; géodésiques, familles isothermes de surface, cinématique générale, trièdre mobile].

III. — Applications analytiques [Classifications des formes quadratiques différentielles, paramètres différentiels et invariants].

IV. — Applications géométriques [variétés à 2 dimensons, courbure ; généralisation des formules de Gauss-Codazzi ; hypersurfaces

dans un espace linéaire à n-dimensions ; groupe de mouvements dans une variété quelconque].

V. — Applications mécaniques [Intégrales premières, linéaires ou quadratiques ; théorème de Stäckel, transformations des équations de la dynamique].

VI. — Applications physiques [Equation de Laplace, champs vectoriels ; équations en coordonnées générales de l'électrodynamique, de la théorie de la chaleur et de l'élasticité].

Le parallélisme dans un continuum quelconque est une notion dont les trois travaux suivants exposent les fondements :

Levi-Civita : Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo. Vol. 42, 1917.

Carpanese Anita : Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque. Annali di Matematica 3ª Seria, vol. XXVIII, 1919.

Ce mémoire retrouve les résultats du précédent en partant de la décomposition du ds^2 en une somme de carrés de n formes linéaires, et des congruences de courbes que cette décomposition permet de considérer.

Un article qui reprend les principes généraux et en développe quelques conséquences, relatives aux intégrales multiples est le suivant :

Palatini, A : Sui fondamenti del calculo differenziale assoluto. Rendiconti del. Circ. Mat. di Palermo, 1919, vol. 43.

L'étude plus particulière des continua à 4 dimensions est poussée assez loin dans *Weitzenböck :* Zur vierdimensionalen Tensoranalysis, Wien. Sitzungsber. Akad. d. Wissensch. II a, Bd. 130, 1922.

Hessenberg : Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie. Math. Annalen, Bd. 78, 1918.

Mémoire fondamental sur les bases mêmes du calcul différentiel absolu et sur le parallélisme. On y trouve déjà quelques-unes des idées que M. *René Lagrange* a développées avec beaucoup d'originalité dans les notes suivantes :

R. Lagrange : Sur le calcul différentiel absolu [C. R., 2ᵉ semestre

1921]. Sur quelques applications du calcul différentiel absolu, et Sur l'application des variétés d'ordre p dans un espace x d'ordre n [C. R., 1er semestre 1922].

Dans ces notes, l'auteur considère des formes quadratiques non plus de différentielles, mais de formes de Pfaff qui ne sont pas forcément intégrables.

Applications des résultats du mémoire de M. Levi-Civita :

Blaschke, W : Frenets Formeln für den Raum von Riemann ; Math. Zeitschr., Bd. VI, 1919.

Néanmoins, avant les travaux de MM. *Ricci* et *Levi-Civita*, l'étude des formes quadratiques de différentielles avait déjà été entreprise systématiquement, citons les mémoires fondamentaux suivants :

Riemann : Die Hypothesen über welche der Geometrie zugrunde liegen ; Commentatio, etc, avec des adjonctions de Weber [Werke, III, Teil]. Il a paru une traduction française du premier de ces mémoires dans les Œuvres de Riemann, traduites par *Laugel*. Deux éditions successives avec commentaires de M. *H. Weyl* ont paru récemment en allemand (Springer, Berlin, 1919 et 1920).

Christoffel : Ueber die Transformationen der homogenen Differentialausdrücke 2ten Grades. Journal f. reine und angew. Mathematik. Bd, 70, 1869.

Théorie de la transformation d'une forme quadratique en une autre, définition systématique des symboles de Christoffel et de Riemann ; formation des invariants quadrilinéaires, pentalinéaires, etc... d'une forme quadratique différentielle, rattachement à la théorie des invariants algébriques.

Lipschitz : Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen. Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 70, 1869.

Lipschitz : Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen, I et II. Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 71, 1870.

Lipschitz : Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. Journal f. reine und angew. Mathematik, Bd. 72.

Lipschitz : Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges, id. Bd, 82, 1877.

La théorie intrinsèque des surfaces à deux dimensions a été, comme on sait, développée d'une manière magistrale par *Darboux* dans ses « Leçons sur la théorie générale des surfaces », 4 vol. Paris, 1887-1915. Les méthodes de cet illustre géomètre sont plus particulières que celles qui font l'objet de ce petit livre ; elles gagnent en profondeur ce qu'elles négligent en étendue. Les géomètres qui entreprendront des recherches sur les espaces quelconques reliront toujours avec profit ce que Darboux a écrit sur les espaces particuliers à deux dimensions [voy. surtout tome III].

Les premiers chapitres du livre de

Bianchi : Lezioni di geometria differenziale, 3za ed. I, 1922, reprennent complètement les calculs de Christoffel sur la transformation des formes quadratiques différentielles.

Ricci : Principi di una teoria delle forme quadratiche. Annali di Mat. 1884, vol. XII (2a Seria).

Etude des formes quadratiques de classe zéro, c'est-à-dire qui peuvent s'exprimer en une somme de n carrés de différentielles de variables indépendantes si la forme est n-aire ; étude des formes de classe 1, c'est-à-dire des formes n-aires qui peuvent être décomposées en une somme de $n+1$ carrés de variables indépendantes. On trouve dans les travaux suivants des applications intéressantes et variées des principaux résultats de *Riemann*, de *Christoffel*, et de *Lipschitz*.

Schlaefli. Sugli spazi di curvatura costante. Ann. di Matemat. 2a Seria, vol. V.

Ce mémoire contient pour la première fois la remarque qu'un continuum C_n peut être immergé dans un espace linéaire E_N à un nombre N de dimensions tel que

$$N \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beez, R. : Ueber das Riemannsche Krümmungsmass : Zeitsch. f. Math. u. Phys. 20 (1875) 21 (1876) 24 (1879) et Math. Ann. VII (1874).

Série de mémoires sur les travaux de Riemann et Christoffel avec des applications à certaines classes particulières de variétés.

Le calcul différentiel absolu s'applique surtout à l'étude des multiplicités considérées en elles-mêmes ; néanmoins le mémoire suivant :

Ricci : Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura. Rendic. dei Lincei. Ser. V, XI, 1902, est une étude des variétés à n dimensions immergées dans une variété quelconque à $n+m$ dimensions. Il pose ainsi la question des relations que soutiennent des variétés décrites à l'intérieur d'autres variétés.

Dans la note suivante :

Herglotz, G. : Zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Leipzig. Berichte, 68, 1916, l'auteur donne une signification géométrique simple du tenseur R_{ik} et de l'invariant R.

Une méthode symbolique de calcul différentiel absolu dont nous n'avons rien dit dans ce livre à cause du peu d'applications qu'on en a données, a été développée par quelques géomètres américains. Nous citerons les principaux travaux :

Maschke : A new method of determining the differential parameters and invariants of quadratic differential quantics. Trans. Amer. Math. Soc. I.

Maschke : Invariants of differential quantics. Transc. Amer. Math. Soc. IV.

Maschke : Differential parameters of the first order. Trans. Amer. Math. Soc. VII.

Smith, A.-W. : The symbolic treatment of differential geometry. Trans. Amer. Math. Soc. VII.

Maschke : The Kronecker Gaussian curvature of hyperspace. Trans. Amer. Math. Soc. VII.

Ingold, L. : Vector interpretation of symbolic differential parameters. Trans. Amer. Math. Soc. XI.

Wilson and Moore : Surfaces in hyperspace. Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences, 52, 1916-1917.

Etude des continua C_2 à 2 dimensions plongés dans un espace quelconque. Ce mémoire donne une série d'applications des diverses méthodes précédemment exposées y compris la méthode symbolique de Maschke.

Il convient de signaler une série d'extensions de la définition de la métrique. Ces extensions fondées sur des critiques de plus en plus profondes des notions géométriques promettent d'être fécondes dès qu'elles seront systématiquement appliquées à la physique.

Weyl, H. : Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. Bd. II, 1918 [voy. aussi *Temps, Espace, Matière*].

Weyl, H. : Zur Infinitesimalgeometrie : Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Göttinger Nachr. 1921.

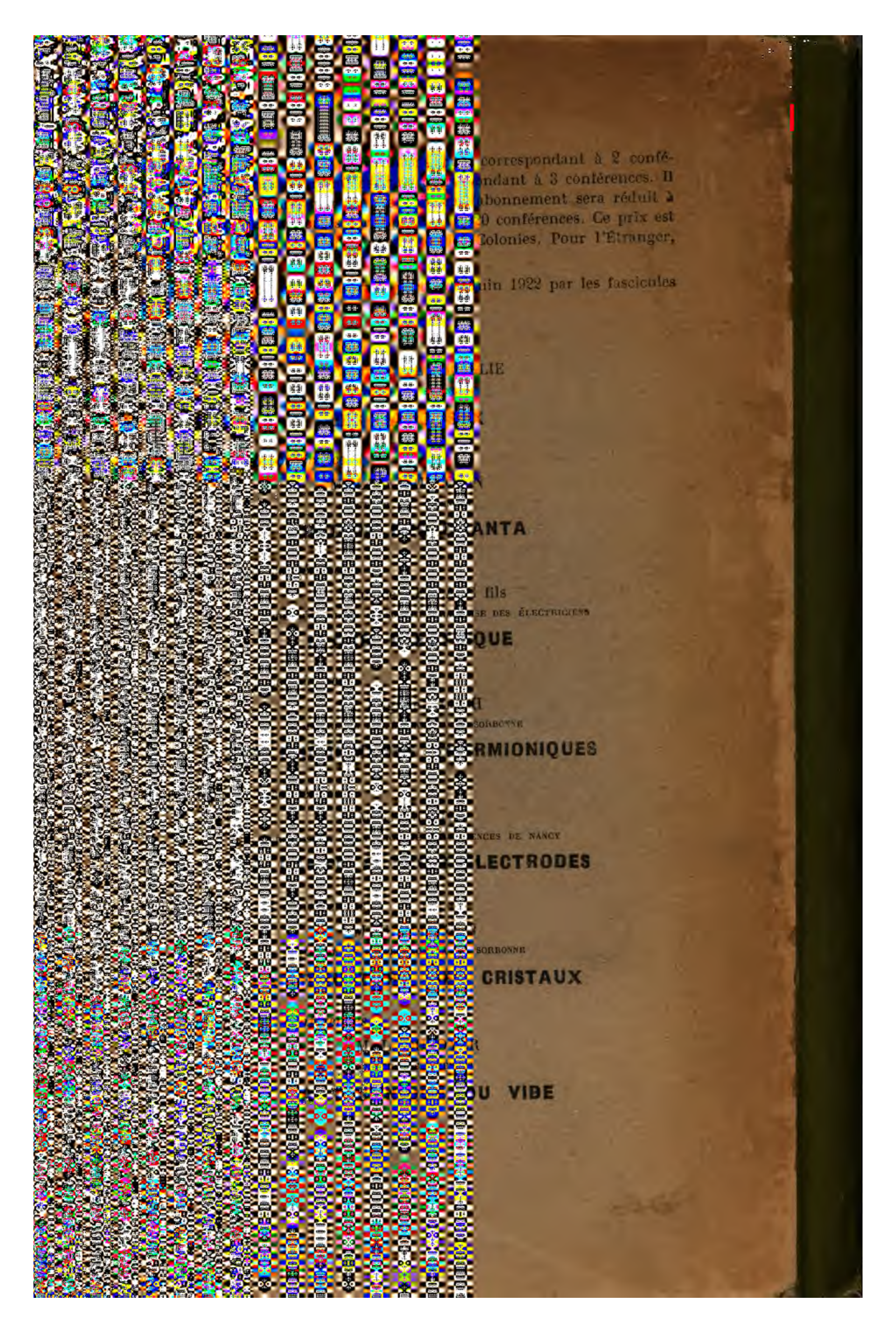
Juvet, G. : Les formules de Frenet dans un espace de M. Weyl. C. R. 1921 ou *Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles,* tome XI, 1921.

Une nouvelle généralisation est due à :

Eddington : A generalisation of Weyl's Theory of the electro magnetic and gravitational Fields. Proc. Roy. Soc. A., 99, (1921).

Enfin M. *Cartan* dans une série de notes très profondes [C. R., 1922] a montré tout le parti qu'on peut tirer de définitions plus générales encore du déplacement parallèle et de la métrique.

TABLE DES MATIERES


correspondant à 2 confé-
ndant à 3 conférences. Il
bonnement sera réduit à
0 conférences. Ce prix est
Colonies. Pour l'Étranger,

uin 1922 par les fascicules

LIE

ANTA

fils
SE DES ÉLECTRICIENS

QUE

SORBONNE

RMIONIQUES

NCES DE NANCY

LECTRODES

SORBONNE

CRISTAUX

OU VIBE